# Ejercicios de Fundamentos Matemáticos I

## Ingeniería de Telecomunicaciones

**Rafael Payá Albert**

**Departamento de Análisis Matemático**

**Universidad de Granada**

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I**

**Relación de Ejercicios Nº 1**

(Fecha límite de entrega: 13 de octubre)

**1.** Probar la desigualdad de Cauchy-Schwartz y discutir la posible igualdad.

**2.** Probar la desigualdad triangular y discutir la posible igualdad.

**3.** *(Teorema de Pitágoras).* Comprobar que dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ son ortogonales si, y sólo si, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

**4.** Comprobar la *identidad de Lagrange:*

$$\|x\|^2 \ \|y\|^2 \ = \ \langle x|y\rangle^2 \ + \ \|x \times y\|^2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^3)$$

y deducir el valor de $\|x \times y\|$.

**5.** Calcular el área del paralelogramo en $\mathbb{R}^3$ de vértices (0,0,0),(5,0,0),(2,6,6) y (7,6,6).

**6.** Calcular el área del paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ de vértices (0,1),(3,0),(5,−2) y (2,−1).

**7.** Calcular el área del triángulo en $\mathbb{R}^3$ de vértices (−1,1,2),(1,−1,3) y (2,3,−1).

**8.** Calcular el volumen del paralelepípedo con aristas concurrentes $AB$, $AC$ y $AD$, siendo $A = (1,1,1)$, $B = (2,0,3)$, $C = (4,1,7)$ y $D = (3,-1,-2)$.

**9.** Calcular la distancia del punto (1,1) a la recta que pasa por (-1,1) y (1,-1).

**10.** Hallar las ecuaciones paramétricas del plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto (3,−1,2) y contiene a la recta de ecuación $(x, y, z) = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$. Calcular también la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

**11.** Hallar las ecuaciones paramétricas del plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos (3,2,−1) y (1,−1,2), siendo paralelo a la recta de ecuación $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$. Calcular también la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

**12.** Calcular la distancia en $\mathbb{R}^3$ del punto (1,1,1) al plano que pasa por (1,1,0), (1,0,1) y (0,1,1).

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

## Relación de Ejercicios  Nº 2

Fecha límite de entrega: 28 de octubre

**1.** Si $f$ y $g$ son campos escalares diferenciables en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, probar que

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \qquad (\text{en } \Omega).$$

**2.** Calcular el gradiente del campo escalar $f$ definido por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq 0),$$

y la derivada direccional de $f$ en el punto $(1,1,1)$, en la dirección del vector $\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

**3.** Calcular el gradiente del campo escalar $f$ dado por

$$f(x,y,z) = x^{yz} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x > 0),$$

y la derivada direccional de $f$ en el punto $(e,e,0)$ en la dirección $\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

**4.** Si $f$ es un campo escalar y $\mathbf{F}$ un campo vectorial, ambos diferenciables en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, comprobar que se verifican las siguientes igualdades en todo $\Omega$:

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \langle \nabla f | \mathbf{F} \rangle + f \operatorname{div}(\mathbf{F})$$

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f \operatorname{rot}(\mathbf{F}).$$

**5.** Dar un ejemplo de campo vectorial $\mathbf{F}$ diferenciable en $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ no sea ortogonal a $\mathbf{F}$. Así pues, $\nabla \times \mathbf{F}$ puede no ser ortogonal a $\mathbf{F}$.

**6.** Calcular la divergencia y el rotacional de los campos vectoriales $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ dados por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|^2} \qquad (\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{v} \neq 0)$$

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I**

**Relación de Ejercicios  Nº 3**

(Fecha límite de entrega: 17 de noviembre)

**1.** Un móvil recorre una trayectoria con origen en el punto $(0, -5, 1)$ y vector velocidad

$$\mathbf{v}(t) = (t, e^t, t^2) \qquad (0 \le t \le 1).$$

Calcular la posición del móvil en el instante $t = 1$.

**2.** Calcular las rectas tangente y normal a la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0)$$

en un punto genérico $(x_0, y_0)$ de la misma.

**3.** Calcular la longitud del camino (helicoidal) de ecuación

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \quad (0 \le t \le 4\pi).$$

**4.** Calcular la longitud de la cicloide:

$$x = t - \operatorname{sen} t\ ,\ y = 1 - \cos t \quad (0 \le t \le 2\pi).$$

**5.** Calcular la integral de línea del campo escalar $f$, definido en todo el plano por

$$f(x, y) \ = \ 2x \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

a lo largo del camino $\gamma$ dado por:

$$\gamma(t) \ = \ (t, t^2) \quad (-1 \le t \le 3/2).$$

**6.** Calcular $\displaystyle\int_\gamma f\, dl$ siendo

$$f(x, y, z) \ = \ y \operatorname{sen} z \ \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big) \ ; \ \gamma(t) \ = \ (\cos t,\, \operatorname{sen} t,\, t) \ \ (0 \le t \le 2\pi).$$

**7.** Calcular el área de la parte del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ comprendida dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

**8.** Un trozo de cable tiene la forma del arco de la curva de ecuación $y = \log x$ comprendido entre los puntos de abcisas 1 y 2. Sabiendo que la densidad lineal del cable en cada punto es igual al cuadrado de su abcisa, calcular la masa total del cable.

**9.** Calcular la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}$ en el espacio, definido por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \qquad \left(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\right),$$

a lo largo del camino $\gamma$ de ecuación

$$\gamma(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, t) \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

**10.** Calcular $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{sen} z \, dx + \cos z \, dy - (xy)^{1/3} \, dz$ siendo

$$\gamma(t) = \left(\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, t\right) \qquad (0 \leq t \leq \pi/2).$$

**FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I**

**Relación de Ejercicios N$^{o}$ 4**

Fecha límite de entrega: 9 de diciembre

**1.** Probar que el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido en todo el plano por

$$\mathbf{F}(x,y) \;=\; (2x\,\mathrm{sen}\,y - y\cos x)\mathbf{i} \;+\; (x^2\,\cos y - \mathrm{sen}\,x)\mathbf{j} \qquad (x,y\in\mathbb{R}),$$

es conservativo y calcular el potencial que se anula en el origen.

**2.** Probar que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) \;=\; yz\,\mathbf{i} + (xz+4yz^2)\,\mathbf{j} + (xy+4y^2z+3)\,\mathbf{k} \qquad (x,y,z\in\mathbb{R}),$$

es conservativo en $\mathbb{R}^3$ y calcular el potencial que se anula en el origen. Calcular también la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl}$ siendo

$$\gamma(t) \;=\; (t,\, t^2,\, \cos\pi t) \qquad (0\le t\le 1).$$

**3.** Se considera el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}\,,\,\frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}\right) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y)\neq(1,0)\big).$$

Calcular la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de un camino $\gamma$ que recorra una circunferencia centrada en el punto $(1,0)$. Probar que $\mathbf{F}$ no es conservativo en $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ pero sí es conservativo en el dominio $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+|y|>1\}$.

**4.** Probar que el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F}(x,y) = \log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathbf{i} + \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}\,\mathbf{j} \quad (x,y\in\mathbb{R},\ x\neq 0)$$

es conservativo en el dominio $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$.

**5.** Para $k = 1, 2, \dots, n$, sea $P_k$ un punto del plano. Se supone que la poligonal que une consecutivamente los puntos $P_1, P_2, \dots, P_n, P_1$ es un camino simple (cerrado). Calcular el área del polígono de vértices $P_1, P_2, \dots, P_n$.

**6.** Calcular la integral de línea

$$\int_\gamma (y + e^{x^3})dx + (2x + \cos y^2)dy$$

siendo $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

**7.** Calcular la integral de línea

$$\int_\gamma \big(\cos x - \frac{1}{6}x^2y^3\big)dx + \big(\frac{1}{6}x^3y^2 + 2e^y\big)dy$$

siendo $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

## Relación de Ejercicios N° 5

Fecha límite de entrega: 12 de enero

**1.** Calcular las ecuaciones del plano tangente y la recta normal en el punto $P$ a la superficie indicada, en cada uno de los siguientes casos.
(a) $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12;\quad P = (1, -1, 4)$
(b) $z = \log(x^2 + y^2);\quad P = (1, 0, 0)$
(c) $\Phi(u, v) = (u + v, 3u^2, u - v);\quad P = (2, 3, 0)$.

**2.** Calcular el área de la parte de la semiesfera de ecuación $z = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}$ comprendida dentro del cilindro circular de ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

**3.** Calcular el área de la superficie parametrizada por las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& (2 + \cos u)\,\cos v \\ y &=& (2 + \cos u)\,\mathrm{sen}\, v \\ z &=& \mathrm{sen}\, u \end{array}\right. \qquad \big(u, v \in [-\pi, \pi]\big)$$

**4.** Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S z^2 ds$, siendo $S$ la esfera unidad, de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**5.** Sea $S$ la semiesfera definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $z \geq 0$, orientada mediante la normal exterior. Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \,.\, \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + 3y^5)\mathbf{i} + (y + 10xz)\mathbf{j} + (z - xy)\mathbf{k} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

**6.** Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \,.\, \overrightarrow{\mathbf{ds}}$, siendo

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)\mathbf{k} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R})$$

y $S$ la superficie cilíndrica definida por $x^2 + y^2 = 1$, con $0 \leq z \leq 1$, orientada mediante la normal exterior.

**7.** Usar el Teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_\gamma -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz,$$

sabiendo que el camino $\gamma$ recorre la curva que se obtiene por intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$.

**8.** Calcular $\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}(\mathbf{F})} \,.\, \overrightarrow{\mathbf{ds}}$ donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}),$$

y $S$ es la semiesfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z \geq 0$, orientada mediante la normal exterior.

**9.** Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $S$ la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada con la normal exterior. Calcular $\iint_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{ds}}$.

**10.** Usar el Teorema de la Divergencia para calcular la integral $\iint_S (x^2 + y + z)ds$, siendo $S$ la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

# FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS I

## Relación de Ejercicios N$^o$ 6

**1.** Probar las siguientes identidades trigonométricas:

$$(1) \quad \operatorname{sen} 3\varphi = 3 \operatorname{sen} \varphi - 4 \operatorname{sen}^3 \varphi$$
$$(2) \quad \cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1$$

**2.** Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función de clase $C^1$ y periódica con periodo $T$, los coeficientes de Fourier de $f$ y de su derivada guardan la siguiente relación:

$$c_n(f') = \frac{2\pi i n}{T} c_n(f) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Deducir la relación que guardan $a_n(f')$ y $b_n(f')$ con $a_n(f)$ y $b_n(f)$. Comprobar que, tanto en su forma real como en su forma compleja, la serie de Fourier de $f'$ se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de $f$.

**3.** Dada una función periódica integrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y fijado $a \in \mathbb{R}$, se consideran las funciones $g$ y $h$ definidas por:

$$g(t) = f(t - a)\,, \; h(t) = f(a\,t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Calcular los coeficientes de Fourier de $g$ y $h$ a partir de los de $f$.

**4.** Calcular las series de Fourier de las funciones de periodo $\pi$ dadas por:

$$\varphi(t) = |\operatorname{sen} t|\,, \; \psi(t) = |\cos t| \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

**5.** Usando la serie de Fourier de la función de periodo $2$ definida por:

$$f(t) = |t| \quad (-1 \le t \le 1)\,; \quad f(t+2) = f(t) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

demostrar que: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

**6.** Dado un número real $\alpha$ que no sea entero, se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de periodo 2, que verifica

$$f(t) = e^{\pi i \alpha t} \qquad \text{para} \qquad -1 \le t < 1$$

Usando la serie de Fourier de $f$, probar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi\alpha}$$