Ejercicios de Análisis Funcional

Curso 2010-2011

1 Preliminares de espacios normados

Problema 1.1. *Demostrar que para* $1 < p < \infty$ *la norma* $\| \, . \, \|_p$ *en* $\mathbb{R}^2$ *verifica la siguiente propiedad:*

Si $x, y \in \mathbb{R}^2$ *con* $x \neq y$ *y* $\| x \|_p = \| y \|_p = 1$, *y* $0 < t < 1$, *entonces*

$$\| tx + (1-t)y \|_p < 1.$$

Problema 1.2. *Probar que el espacio normado* $(\mathbb{R}^2, \| \, . \, \|_1)$ *es isométricamente isomorfo a* $(\mathbb{R}^2, \| \, . \, \|_\infty)$, *pero no lo es a* $(\mathbb{R}^2, \| \, . \, \|_p)$ *para* $1 < p < \infty$.

Problema 1.3. *Sea* X *un espacio normado. Probar que si* $\{x_n\}$ *es una sucesión de Cauchy de* $X \backslash \{0\}$ *que no converge a cero, entonces* $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ *es también una sucesión de Cauchy.*

Problema 1.4. *Sean* X *un espacio normado y* A *un subconjunto no vacio de* X.

1. *Probar que* $\overline{A + B_X} = \{x \in X \, : \, dist(x, A) \leq 1\}$.
2. *Deducir que* $A + B_X$ *es cerrado si, y sólo si, para cada* $x \in X$ *con* $dist(x, A) = 1$ *existe* $a \in A$ *tal que* $\| x - a \| = 1$.

Problema 1.5. *Demostrar que para* $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ *se verifica:*

$$l_{p_1} \subset l_{p_2} \text{ y } \| x \|_{p_2} \leq \| x \|_{p_1} \text{ para todo } x \in l_{p_1}.$$

Problema 1.6. *Sea* c *el subespacio de* l_∞ *formado por todas las sucesiones convergentes. Considérese el subconjunto compacto de* $\mathbb{R}$ *dado por*

$$K = \{\frac{1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\},$$

y el espacio normado $C(K)$ *de todas las funciones continuas de* K *en* $\mathbb{K}$ *dotado de las operaciones puntuales y la norma del máximo. Probar que los espacios* c *y* $C(K)$ *son isométricamente isomorfos.*

Problema 1.7. *Sea X un espacio topológico Hausdorff localmente compacto. Probar que el espacio $C_{00}(X)$ (de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{K}$ con soporte compacto) es denso en el espacio $C_0(X)$ (de todas las funciones continuas de X en $\mathbb{K}$ que se anulan en infinito).*

Problema 1.8. *Sean X, Y espacios normados. Probar que si $T : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal tal que $Ker(T)$ es un subespacio cerrado de X y $T(X)$ es un subespacio finito dimensional de Y, entonces T es continua.*

Problema 1.9. *En l_∞ se considera la familia $\{\frac{1}{n}e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Probar que dicha familia es sumable y sin embargo no es absolutamente sumable.*

Problema 1.10. *Sea $\{X_i : i \in I\}$ una familia de espacios normados. Para $1 \leq p < \infty$ se define la l_p-suma de la familia como el espacio vectorial*

$$\oplus_{i\in I}^{l_p} X_i = \{\{x_i\}_{i\in I} : x_i \in X_i \ (i \in I) \ \ y \ \ \{\| x_i \|^p : i \in I\} \ es\ sumable\,\}\}$$

con las operaciones puntuales y la norma dada por

$$\| \{x_i\}_{i\in I} \| = [\sum_{i\in I} \| x_i \|^p\,]^{\frac{1}{p}}.$$

Análogamente, se define la l_∞-suma de la familia como el espacio vectorial

$$\oplus_{i\in I}^{l_\infty} X_i = \{\{x_i\}_{i\in I} : x_i \in X_i \ (i \in I) \ \ y \ \ \{\| x_i \| : i \in I\} \ es\ acotada\,\}$$

con las operaciones puntuales y la norma dada por

$$\| \{x_i\}_{i\in I} \| = Sup\,\{\| x_i \| : i \in I\}.$$

Probar que, si para $J \subseteq I$, se considera el subespacio M de $X = \oplus_{i\in I}^{l_p} X_i$ $(1 \leq p \leq \infty)$ dado por

$$M = \{\{x_i\}_{i\in I} \in X : x_i = 0 \ para\ todo\ i \in J\},$$

entonces X/M es isométricamente isomorfo a $\oplus_{i\in J}^{l_p} X_i$.

Problema 1.11. *Sea X la l_p-suma de la familia de espacios normados*

$$\{X_i \, : \, i \in I\}.$$

1. *Probar que para $1 \leq p < \infty$ se verifica que: X es separable si, y sólo si, I es numerable y para todo $i \in I$ el espacio normado X_i es separable.*
2. *Probar que para $p = \infty$ se verifica que: X es separable si, y sólo si, I es finito y para todo $i \in I$ el espacio normado X_i es separable.*

Problema 1.12. *Se define la c_0-suma de la familia de espacios normados $\{X_n \, : \, n \in \mathbb{N}\}$ como el espacio vectorial*

$$\oplus_{n\in\mathbb{N}}^{c_0} X_n = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \, : \, lim \; \| \, x_n \, \| = 0\}$$

con las operaciones puntuales y la norma dada por

$$\| \, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \, \| = Max \{\| \, x_n \, \| : \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Probar que $(\oplus_{n\in\mathbb{N}}^{c_0} X_n)^*$ es isométricamente isomorfo a $\oplus_{n\in\mathbb{N}}^{l_1} X_n^*$.

Problema 1.13. *Sean X, Y y Z espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.*

(1) Probar que para una aplicación bilineal $T : X \times Y \longrightarrow Z$ equivalen:

(a) T es continua en un punto.

(b) T es continua en $(0, 0)$.

(c) T está acotada en $B_X \times B_Y$.

(d) T está acotada en $S_X \times S_Y$.

(e) Existe $M \geq 0$ tal que $\| \, T(x, y) \, \| \leq M \, \| \, x \, \| \| \, y \, \|$ para cualesquiera $x \in X$ e $y \in Y$.

(f) T es continua.

Probar que en tal caso se da la igualdad de los siguientes tres números reales

$$Sup \{\| \, T(x, y) \, \| : \, (x, y) \in S_X \times S_Y\}$$

$$Sup \{\| \, T(x, y) \, \| : \, (x, y) \in B_X \times B_Y\}$$

$$Min \{M \geq 0 \, : \| \, T(x, y) \, \| \leq M \, \| \, x \, \| \| \, y \, \| \quad \forall x \in X, y \in Y\}.$$

(2) *Probar que el espacio vectorial $BL(X,Y;Z)$ de todas las aplicaciones bilineales y continuas de $X\times Y$ en Z (para las operaciones usuales de suma y producto por escalares) es un espacio normado para la norma de operadores bilineales, definida para cada $T\in BL(X,Y;Z)$ por*

$$\| T \| := Sup\{\| T(x,y) \| : (x,y)\in S_X\times S_Y\}.$$

Probar que $BL(X,Y;Z)$ es un espacio de Banach cuando Z lo es.

(3) *Describir un isomorfismo isométrico entre los espacios $BL(X,Y;Z)$ y $BL(X,BL(Y,Z))$.*

Problema 1.14. *Considérese en c_0 el funcional lineal f dado por*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x_n, \quad \forall x=\{x_n\}\in c_0.$$

Probar que f es continuo, $\| f \|=1$ y f no alcanza su norma. Probar que el conjunto $A=\{x\in c_0 : f(x)=1\}$ es convexo, cerrado, $dist(0,A)=1$, y dicha distancia no se alcanza.

2 Espacios de Hilbert

Problema 2.1. *Sea X un espacio prehilbertiano real. Demostrar que para $x, y \in X$ equivalen:*

1. $x \perp y$.
2. $\| x + ty \| = \| x - ty \|$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
3. $\| x + ty \| \geq \| x \|$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Problema 2.2. *Demostrar que la elipse* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ *de semiejes* $a, b \in \mathbb{R}^+$ *es la esfera unidad para una norma de espacio de Hilbert en* $\mathbb{R}^2$.

Problema 2.3. *Sean X un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de X. Si $\pi : X \to X/M$ es la proyección natural, comprobar que*

$$\pi |_{M^\perp} : M^\perp \to X/M$$

es un isomorfismo isométrico.

Problema 2.4. *Probar que si X es un espacio de Hilbert y $P : X \longrightarrow X$ es una proyección lineal continua de norma 1, entonces P es una proyección ortogonal.*

Problema 2.5.

1) *Probar que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano X, entonces $\{(x \mid x_n)\} \longrightarrow 0$ para cualquier $x \in X$.*
2) *Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormal en l_2. Probar que, para cada $i \in \mathbb{N}$, se verifica que $\{x_n(i)\} \longrightarrow 0$.*

Problema 2.6. *Probar que si X es un espacio de Hilbert y M es un subespacio cerrado de X, entonces para cada $f \in M^*$ existe un único $\overline{f} \in X^*$ que extiende a f y tiene la misma norma.*

Problema 2.7. *Probar que el Teorema de Riesz-Fréchèt es falso en espacios prehilbertianos no completos. (Considérese el subespacio c_{00} en l_2).*

Problema 2.8. *Probar que si X es un espacio normado e Y es un espacio de Hilbert, entonces para cada $T \in BL(X,Y)$ se verifica que*

$$\| T \| := Sup\{| (T(x) \mid y) | : (x,y) \in S_X \times S_Y\}.$$

3 Teorema de Hahn-Banach

Problema 3.1. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sean $p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$ seminormas. Probar que si $f : X \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal verificando que $| f(x) | \leq p_1(x) + p_2(x)$ para todo $x \in X$, entonces existen $f_1, f_2 : X \to \mathbb{K}$ funcionales lineales tales que $f = f_1 + f_2$, y $| f_1(x) | \leq p_1(x)$, $| f_2(x) | \leq p_2(x)$ para todo $x \in X$.* [Indicación: En el espacio vectorial $X \times X$ considérese la seminorma p definida por $p(x_1, x_2) = p_1(x_1) + p_2(x_2)$, y en el subespacio $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ considérese el funcional lineal h definido por $h(x, x) = f(x)$.]

Problema 3.2. *Sean X un espacio vectorial y M un subespacio vectorial de X. Supóngase que p es una seminorma en X y que q es una seminorma en M tales que $q(m) \leq p(m)$ para todo $m \in M$. Probar que existe una seminorma r en X tal que $r(m) = q(m)$ para todo $m \in M$ y $r(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.* [Indicación: Considérese el funcional de Minkowski de $U := co(B_{(X,p)} \cup B_{(M,q)})$.]

Problema 3.3. *Sean X un espacio normado y M un subespacio vectorial de X. Supóngase que $|||\ .\ |||$ es una norma equivalente en M. Probar que $|||\ .\ |||$ puede extenderse a una norma equivalente sobre X.*

Problema 3.4. *Sean X un espacio normado, M un subespacio vectorial de X, y $u \in X$. Probar que existe $f \in X^*$ tal que $| f(x) | \leq dist(x, M)$ para todo $x \in X$ y $f(u) = dist(u, M)$.*

Problema 3.5. *Sean X un espacio normado real y M un subespacio vectorial de X. Probar que si $f, g \in M^*$ verifican que $| f(m) | + | g(m) | \leq \| m \|$ para todo $m \in M$, entonces existen $h, k \in X^*$ que extienden a f y g respectivamente y verifican*

$$| h(x) | + | k(x) | \leq \| x \|$$

para todo $x \in X$. [Indicación: Considérense $f + g$ y $f - g$.]

Problema 3.6. *1) Demostrar que existe un funcional lineal continuo L en l_∞ con las siguientes propiedades:*

(1) $\| L \| = 1$.

(2) $L(x) = lim\, x_n$ *para todo* $x = \{x_n\} \in c$.

(3) $L(x) \geq 0$ *para todo* $x = \{x_n\} \in l_\infty$ *con* $x_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(4) $L(x) = L(x')$ *para todo* $x = \{x_n\} \in l_\infty$*, donde* x' *designa el elemento de* l_∞ *obtenido a partir de* x *suprimiendo la primera entrada, esto es* $x' = \{x_{n+1}\}$.

(5) $\liminf x_n \leq L(x) \leq \limsup x_n$*, para todo* $x = \{x_n\} \in l_\infty$ *en el caso en que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2) Deducir que si $x = \{x_n\} \in l_\infty$ *es tal que la sucesión* $\{x_{n+1} - x_n\}$ *es convergente, entonces su límite ha de ser cero.*

3) Probar que $L(\{(-1)^n x_n\}) = 0$ *para todo* $x = \{x_n\} \in c$*. Deducir que* L *no puede ser multiplicativo, esto es verificar la propiedad:* $L(xy) = L(x)L(y)$ *para cualesquiera* $x, y \in l_\infty$.

Problema 3.7. *Probar que si* $P : c \to c$ *es una proyección lineal continua de* c *sobre* c_0*, entonces* $\| P \| \geq 2$*. Deducir que* Id_{c_0} *no se puede extender a* c *sin aumentar la norma.*

Problema 3.8. *Sean* X *un espacio normado y* M *un subespacio vectorial de* X*. Probar que para cada* $T \in BL(M, l_\infty)$*, existe* $S \in BL(X, l_\infty)$ *tal que* $S|_M = T$ *y* $\| S \| = \| T \|$.

Problema 3.9. *Sea* X *un espacio normado. Para* $f \in X^*$*, determinar* f^*.

Problema 3.10. *Para cada* $x \in l_1$ *considérese la sucesión* $T(x)$ *dada por* $T(x) = \{\sum_{k \geq n} x_k\}_{n \in \mathbb{N}}$*. Probar que* $T : l_1 \to c_0$ *es una bien definida aplicación lineal continua, y describir* $T^* \in BL(l_1, l_\infty)$.

Problema 3.11. *Sea X un espacio de Banach. Probar que si X^* contiene un subespacio cerrado propio que separa los puntos de X, entonces X no es reflexivo.*

Problema 3.12. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal continua. Probar que:*

1. *$T(X)$ es denso en Y si, y sólo si, T^* es inyectiva.*
2. *$T^*(Y^*)$ denso en X^* implica que T es inyectiva.*

Si T es inyectiva, puede afirmarse que $T^*(Y^*)$ es denso en X^*? [Indicación: Considérese la aplicación inclusión de l_1 en l_2.]

Problema 3.13. *Sean E un espacio métrico, $A \subseteq E$ y $\varepsilon > 0$. Se dice que A es ε-separado si ocurre que $d(a, b) \geq \varepsilon$ para cualesquiera $a, b \in A$ distintos.*

Probar que si X es un espacio normado real, $0 < \varepsilon < 1$, y A es un subconjunto ε-separado maximal de S_X, entonces se verifica

1) $\sup f(A) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall f \in S_{X^*}$.

2) $(1 - \varepsilon)B_X \subseteq \overline{co}(A)$.

Problema 3.14. *Sea X un espacio normado real infinito dimensional. Probar que existen A, B subconjuntos convexos de X tales que $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, y tanto A como B son densos en X.* [Indicación: Tómese un funcional lineal discontinuo en X, y considérense los semiespacios

$$A = \{x \in X : f(x) \geq 0\} \ \text{ y } \ B = \{x \in X : f(x) < 0\}.]$$

4 Teoremas de la aplicación abierta, de los isomorfismos de Banach, de la gráfica cerrada, y de Banach-Steinhaus.

Problema 4.1.
1) Sean (X,τ) un espacio topológico, (Y,τ_Y) un subconjunto no vacio de X dotado de la topología inducida, y A un subconjunto de Y. Probar que:

- *i) Si A es raro en (Y,τ_Y), entonces A es raro en (X,τ).*
- *ii) Si A es de primera categoría en (Y,τ_Y), entonces A es de primera categoría en (X,τ). Equivalentemente: Si A es de segunda categoría en (X,τ), entonces A es de segunda categoría en (Y,τ_Y).*

2) Probar que si X es un espacio de Banach infinito dimensional, entonces X contiene un subespacio propio que es de segunda categoría en X. Deducir que existe un espacio normado no completo que es de segunda categoría en si mismo.

Problema 4.2. *Sean X, Y espacios de Banach, y $A \subseteq Y^*$ tal que A separa los puntos de Y. Probar que si $T : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal tal que $fT \in X^*$ para todo $f \in A$, entonces T es continua.*

Problema 4.3. *Probar que no existe ninguna sucesión $u = \{u_n\}$ en $\mathbb{K}$ tal que, para toda sucesión $x = \{x_n\}$ en $\mathbb{K}$, se verifica que:*

$$x \in l_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n u_n\} \ \text{ está acotada.}$$

[Sugerencia: Supuesta la existencia de una tal sucesión $u = \{u_n\}$, nótese que se puede suponer que todos sus términos son no nulos, y considérese para cada sucesión $x = \{x_n\}$, la sucesión $x' = \{\frac{x_n}{u_n}\}$, y demuéstrese que la aplicación $x \mapsto x'$ es un isomorfismo topológico de l_∞ sobre l_1].

Problema 4.4. *Sean E y F espacios métricos, y $f : E \to F$ una aplicación con gráfica cerrada. Probar que para todo compacto K de F se verifica que $f^{-1}(K)$ es un cerrado de E.*

Problema 4.5. *Probar que todo funcional lineal con gráfica cerrada de un espacio normado es continuo.*

Problema 4.6. *Sean X un espacio normado y M un subespacio complementado de X. Supóngase que $\{f_n\}$ es una sucesión en M^* satisfaciendo que $\{f_n(m)\} \to 0$, para todo $m \in M$. Probar que existe una sucesión $\{g_n\}$ en X^* satisfaciendo que $\{g_n(x)\} \to 0$, para todo $x \in X$, y tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, g_n es una extensión de f_n.*

Problema 4.7. *Probar que si X un espacio de Banach isomorfo a un espacio dual, entonces X está complementado en X^{**}.*

Problema 4.8. *Probar que l_∞ está complementado en todo espacio normado que lo contenga.*

Problema 4.9. *Sean X e Y espacios de Banach, y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Probar*

1) *T es inversible por la derecha (existe $S \in BL(Y, X)$ tal que $TS = Id_Y$) si, y sólo si, T es abierta y $Ker(T)$ está complementado en X.*

2) *T es inversible por la izquierda (existe $S \in BL(Y, X)$ tal que $ST = Id_X$) si, y sólo si, $T : X \to T(X)$ es un isomorfismo topológico y $T(X)$ está complementado en Y.*

Problema 4.10. *Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y $f : X \to \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo. Probar:*

1) *Toda proyección lineal $P : X \to X$ tal que $P(X) = Ker(f)$ es de la forma $P(x) = x - f(x)u$ para conveniente $u \in X$ con $f(u) = 1$.*

2) *Si X es normado, entonces $Ker(f)$ está complementado si, y sólo si, f es continuo.*

Problema 4.11. *Sean X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ e I un conjunto no vacio. Dada una aplicación lineal $T : X \to l_\infty(I)$ se considera, para cada $i \in I$, el funcional lineal $T_i : X \to \mathbb{K}$ definido por*

$$T_i(x) = T(x)(i).$$

Probar que si $T_i \in X^*$ para todo $i \in I$, entonces T es continua.

Problema 4.12. *Sean X un espacio de Banach real y $T : X \to C([0,1], \mathbb{R})$ una aplicación lineal. Se considera, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el funcional lineal $T_n : X \to \mathbb{R}$ definido por*

$$T_n(x) = \int_0^1 t^n T(x)(t) dt.$$

Probar que si $T_n \in X^*$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces T es continua.

Problema 4.13. *Sean X un espacio de Banach, $E \subseteq X$ tal que $X = \overline{Lin(E)}$, y $\{f_n\}$ una sucesión de elementos de X^*. Probar que equivalen:*

1) $\{f_n(x)\} \to 0$ *para todo* $x \in X$.

2) *Sup* $\{\| f_n \| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ *y* $\{f_n(e)\} \to 0$ *para todo* $e \in E$.

Problema 4.14. *Sean (E, d) un espacio métrico y X un espacio normado. Probar que una aplicación $\phi : E \to X$ es lipschitziana si, y sólamente si, $f\phi$ lo es, para toda $f \in X^*$.*

Nombre Fichero: EnEjercAnFunc2010