Exámenes de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Licenciatura en Matemáticas

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 18/06/2004.

1. (**Valor total del ejercicio 4 puntos.**) Considérese la ecuación de Laplace

$$\Delta u(x) = 0 \tag{1}$$

y sea $\xi \in \mathrm{R}^n$ dado.

(a) (**1 punto**) Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathrm{R}^n \setminus \{\xi\})$ es solución de (1) de la forma $u(x) = v(\|x-\xi\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathrm{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0, \ \forall\, r \in (0, +\infty) \tag{2}$$

Recíprocamente, si $v \in C^2(0, +\infty)$ verifica (2) entonces $u(x) = v(\|x-\xi\|)$ verifica (1) en $\mathrm{R}^n \setminus \{\xi\}$.

(b) (**0.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, encontrar una fórmula que proporcione todas las soluciones de (2).

(c) (**0.5 puntos**) Escríbase la solución fundamental, $\Phi(x, s)$, para (1). Enunciado de la primera y segunda fórmulas de Green.

(d) (**1 punto**) Enunciado de la fórmula fundamental integral de Green. Demostración detallada de la misma para el caso $n = 2$.

(e) (**1 punto**) Considérese el problema de Dirichlet

$$\Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega \equiv B_{\mathrm{R}^n}(0; 1), \quad u(x) = f(x), \ x \in \partial\Omega \tag{3}$$

Demuéstrese que si $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ es un polinomio, entonces la única solución de (3) es un polinomio del mismo grado que f.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos)** Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{$C2$}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

(a) (**0.5 puntos**) Para cada función $h \in L^2(0,\pi)$, escríbase el desarrollo en serie de Fourier de h respecto de la base $\{(\pi)^{-1/2}, (2/\pi)^{1/2} \cos\ n(.),\ n \in \mathbb{N}\}$. Dar condiciones suficientes que permitan asegurar que si $h_n,\ n \in \mathbb{N}$ son los coeficientes de Fourier de h respecto de esta base, entonces la serie $\sum |h_n|$ es convergente.

(b) (**1 punto**) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

(c) (**2 puntos**) Pruébese que si $f \in C^1[0,\pi]$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)\exp(-n^2 t), \text{ si } \ t > 0, \\ f(x), \ \text{ si } \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\ dx,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

3. (**Valor total del ejercicio 2.5 puntos**) Considérese la ecuación casilineal de orden uno, en dos variables independientes

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{4}$$

donde a, b, c son funciones de clase C^1 en un dominio Ω de R^3.

(a) (**1 punto**) Formúlese con precisión el concepto de problema de Cauchy para (4), así como el concepto de solución del mismo. Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del citado problema de Cauchy.

(b) (**1.5 puntos**) Calcúlese la única solución del problema de Cauchy

$$xu_x + yuu_y = -xy, \ xy = 1, u = 5, \ x \in [a, b], \ a > 0 \tag{5}$$

Sugerencia: Si $(x(t,s), y(t,s), u(t,s))$ es la única solución del sistema característico asociado a (5), demuéstrese que para cualquier $s \in [a, b]$ fijo se tiene $(x(t,s)y(t,s))_t + (u(t,s) + \frac{1}{2}u^2(t,s))_t = 0$.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 16/09/2004.

1. (**Valor total del ejercicio 3 puntos.**)

   (a) (**0.5 puntos**) Enunciado de la propiedad del valor medio para funciones armónicas, tanto en el caso de bolas como de esferas. ¿Caracteriza esta propiedad a las funciones armónicas? Razónese la respuesta.

   (b) (**0.5 puntos**) Enunciado del principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.

   (c) (**2 puntos**) Usando los dos apartados anteriores, demuéstrese rigurosamente el llamado Teorema de Harnack (para funciones armónicas):
   Sea Ω un dominio acotado de R^n y $\{u_n\}$ una sucesión de funciones reales, cada una de las cuales es armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Si la sucesión $\{u_n\}$ es uniformemente convergente en $\partial\Omega$, entonces $\{u_n\}$ converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función u, que es armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\
u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ 0 < t \le T, \\
u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le \pi,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

   donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

   (a) (**1 punto**) Para cada función $h \in L^2(0,\pi)$, escríbase el desarrollo en serie de Fourier de h respecto de la base $\{(2/\pi)^{1/2}\text{sen } n(\cdot),\ n \in \mathbb{N}\}$. Dar condiciones suficientes sobre la función h que permitan asegurar que si $h_n,\ n \in \mathbb{N}$ son los coeficientes de Fourier de h respecto de esta base, entonces la serie $\sum |h_n|$ es convergente.

(b) (**0.5 puntos**) Defínase con precisión el concepto de solución de (1). Enúnciese el principio del máximo mínimo para la ecuación del calor. Usando este principio, demuéstrese que (1) puede tener, a lo sumo, una solución.

(c) (**2 puntos**) Pruébese que si $f \in C^1[0, \pi]$ y $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces la única solución de (1) viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{sen}(nx) \exp(-n^2 t), & \text{si} \quad t > 0, \\ f(x), & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{sen}(nx) \; dx, \; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

3. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos.**)

(a) (**1.5 puntos**) Considérese la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \;\; (x,t) \in \mathrm{R}^2 \tag{2}$$

Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x + t$, $\mu = x - t$, la ecuación anterior se transforma en $u_{\xi\mu}(\xi, \mu) = 0$, $(\xi, \mu) \in \mathrm{R}^2$. Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ de (2). ¿Es dicho conjunto un espacio vectorial real de dimensión finita?

(b) (**2 puntos**) Considérese el problema $u_{xt}(x,t) = f(x,t)$, $u(x,0) = \alpha(x)$, $u_t(x,0) = \beta(x)$, $(x,t) \in \mathrm{R}^2$, con f continua en R^2, $\alpha \in C^2(\mathrm{R})$, $\beta \in C^1(\mathrm{R})$. Demuéstrese que tiene solución $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ si y solamente si se verifica la relación $\beta'(x) = f(x,0)$, $\forall \; x \in \mathrm{R}$ y que, en este caso, la solución no es única.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 26/04/2005.

1. (**Valor total del ejercicio 2 puntos.**) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden
$$u_{xy}(x,y) + a\ u_x(x,y) = 0,\ \ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$
donde a es una constante real.
   (a) (**0.5 puntos)** Demuéstrese que el conjunto de soluciones ($u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$) de (1) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.
   (b) (**1.5 puntos)** Encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (1).

2. (Valor total del ejercicio **4 puntos**) Se considera el problema de tipo mixto para la ecuación de ondas no homogénea
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= f(x,t), \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0,\ \ 0 \le t, \\ u(x,0) = u_t(x,0) &= 0, \qquad\qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{ONH}$$
donde f y f_x son continuas en $[0,\pi] \times [0,\infty)$ y $f(0,t) = f(\pi,t) = 0,\ \forall\ t \ge 0$.
   (a) (**1.5 puntos**) Demuéstrese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$.
   (b) (**2.5 puntos**) Si $F(x,t)$ es la extensión impar y $2\pi-$ periódica de f, respecto de x, pruébese que la función
$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\psi,\tau)\ d\psi\ d\tau$$
es la única solución de (ONH).

3. (**Valor total del ejercicio 4 puntos.**) Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{$C2$}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

(a) (**1 punto**) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

(b) (**1 punto**) Aplíquese el método de separación de variables para encontrar soluciones elementales de (C2).

(c) (**2 puntos**) Usando el apartado anterior, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C2), dando condiciones suficientes sobre f que permitan probar, rigurosamente, que la fórmula propuesta es válida.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 25/06/2005. **Primera parte**

1. (**Valor total del ejercicio 1.5 puntos.**) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden
$$u_{xy}(x,y) + a\ u_x(x,y) + bu_y(x,y) + abu(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$
donde a y b son constantes reales y $u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$.
   (a) (**1 punto)** Mediante el cambio de variable $u(x,y) = v(x,y)e^{-ay-bx}$, encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (1).
   (b) (**0.5 puntos)** Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (1) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

2. (Valor total del ejercicio **3.5 puntos**) Se considera el problema de tipo mixto para la ecuación de ondas no homogénea
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= f(x,t), && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \le t, \\ u(x,0) = u_t(x,0) &= 0, && 0 \le x \le \pi, \end{aligned}\right. \qquad (ONH)$$
donde f y f_x son continuas en $[0,\pi] \times [0,\infty)$ y $f(0,t) = f(\pi,t) = 0,\ \forall\ t \ge 0$.
   (a) (**1 punto**) Demuéstrese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$.
   (b) (**2.5 puntos**) Si $F(x,t)$ es la extensión impar y $2\pi-$ periódica de f, respecto de x, pruébese que la función
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\psi,\tau)\ d\psi\ d\tau$$
   es la única solución de (ONH).

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 25/06/2005. **Segunda parte**

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos.**) Considérese el problema de Dirichlet

$$\begin{array}{c} \Delta u(x) = g(x), \ x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), \ x \in \partial\Omega \end{array} \tag{1}$$

donde Ω es un dominio acotado de R^n, $g \in C(\Omega)$, $f \in C(\partial\Omega)$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(a) **(0.5) puntos)** Enúnciese con precisión el principio del máximo mínimo para funciones armónicas, y usando este principio pruébese que (1) puede tener, a lo sumo, una solución.

(b) Si $\Omega = B_{\mathrm{R}^n}(0;1)$ y $g \equiv 0$, pruébese que la única solución de (1) es

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n} \displaystyle\int_{|s|=1} \dfrac{1-|x|^2}{|s-x|^n} \ f(s) \ ds, \ x \in \Omega, \\ \\ f(x), \ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

mediante los siguientes apartados:

i. **(1.5 puntos)** $u \in C^\infty(\Omega)$ y $\Delta u(x) = 0, \ \forall \ x \in \Omega$ (sugerencia para probar que u es armónica en Ω : $\frac{1-|x|^2}{|s-x|^n} = -\frac{\partial G(x,s)}{\partial n(s)}, \ \forall \ x \in \Omega, \ \forall s \in \partial\Omega$, donde G es la función de Green).

ii. **(1.5 puntos)** $u \in C(\partial\Omega)$ (sugerencia: $1 = \frac{1}{\omega_n} \displaystyle\int_{|s|=1} \frac{1-|x|^2}{|s-x|^n} \ ds$, $\forall \ x \in \Omega$)

2. **(Valor total del ejercicio 1.5 puntos)** Pruébese que la ecuación

$$\Delta u(x,y) = 0, \ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \tag{3}$$

se transforma en

$$\frac{1}{\rho} \ \frac{\partial(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \ \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \ 0 < \rho < 1, \ \phi \in \mathrm{R}, \tag{4}$$

mediante el cambio a coordenadas polares $x = \rho \cos \phi, \ y = \rho \mathrm{sen} \phi$.

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Licenciatura en Matemáticas. Cuarto curso, 22/09/2005, Primera parte

1. **(2 puntos)** Pruébese que la ecuación

$$\Delta u(x,y,z) = 0 \tag{1}$$

se transforma en

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\, s^2} = 0, \tag{2}$$

mediante el cambio a coordenadas cilíndricas $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\phi,\ z = s.$

2. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**) Se considera el problema de tipo mixto para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & f(x,t), & 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & 0 \le t, \\ u(x,0) = h(x),\ u_t(x,0) & = & g(x), & 0 \le x \le \pi, \end{array} \tag{ONH}$$

donde f es continua en $[0,\pi]\times[0,\infty)$, $h \in C^2[0,\pi]$, $g \in C^1[0,\pi]$.

(a) (**1 punto**) Demuéstrese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([0,\pi]\times[0,\infty))$.

(b) (**2 puntos**) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\ 0 \le x \le \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = \mathrm{sen}x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \mathrm{sen}^2 x,\ 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, \end{gathered} \tag{3}$$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Licenciatura en Matemáticas. Cuarto curso, 22/09/2005, Segunda parte

1. (**Valor total del ejercicio 2.5 puntos**)

   (a) (**1.5 puntos**) Enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

   (b) (**1 punto**) Calcular la única solución del problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned}$$

   donde

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(4x), \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. (**2.5 puntos**) Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{gathered} u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi, \\ u(0,y) = 0,\ u(1,y) = f(y),\ u(x,0) = 0,\ u(x,\pi) = 0 \end{gathered}$$

   imponiendo hipótesis adecuadas a la función f.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 25/04/2006.

1. (**Valor total del ejercicio 1.5 puntos**) Sea Ω un abierto no vacío de $\mathrm{R}^n,\ n \geq 2$. Estúdiese rigurosamente la dimensión del espacio vectorial formado por todas las soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega$.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Se considera el problema de tipo mixto para la ecuación de ondas no homogénea

$$\left.\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & f(x,t), & 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & 0 \leq t, \\ u(x,0) = u_t(x,0) & = & 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{array}\right. \qquad (ONH)$$

donde f y f_x son continuas en $[0,\pi] \times [0,\infty)$ y $f(0,t) = f(\pi,t) = 0,\ \forall\ t \geq 0$.

(a) (**2 puntos**) Si $F(x,t)$ es la extensión impar y $2\pi-$ periódica de f, respecto de x, pruébese que la función

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\psi,\tau)\ d\psi\ d\tau$$

es solución de (ONH).

(b) (**1.5 puntos**) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \mathrm{sen}(3x), & 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & 0 \leq t, \\ u(x,0) = -\mathrm{sen}x,\ u_t(x,0) & = & 8\mathrm{sen}(5x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array}$$

3. (**Valor total del ejercicio 5 puntos.**) Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{$C2$}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

(a) (**1 punto**) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\,dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\,dx\,ds$$

(b) (**1 punto**) Demuéstrese rigurosamente que las funciones propias de (C2) son las funciones $\cos(\frac{2n-1}{2}x),\ n \in \mathbb{N}$.

(c) (**1 punto**) Usando el hecho de que las funciones $\{\cos(nx),\ n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\}$ constituyen una base ortogonal de $L^2(0,\pi)$, demuéstrese que las funciones $\{\cos(\frac{2n-1}{2}x),\ n \in \mathbb{N}\}$ también forman una base ortogonal de $L^2(0,\pi)$.

(d) (**2 puntos)** Usando el apartado anterior, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C2), dando condiciones suficientes sobre f que permitan probar, rigurosamente, que la fórmula propuesta es válida.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 28/06/2006.

1. (**Valor total del ejercicio 4 puntos**) Considérese el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathrm{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \alpha(x),\ x \in \mathrm{R}, \\ u_t(x,0) = \beta(x),\ x \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) (**2 puntos**) Sea $(x_0, t_0) \in \mathrm{R}^2$, tal que $t_0 > 0$ y T su triángulo característico. Pruébese que si v es cualquier función real perteneciente a $C^2(\overline{T})$, se tiene

$$\begin{aligned} v(x_0,t_0) &= \frac{1}{2}\,[v(x_0+t_0,0)\ +\ v(x_0-t_0,0)\ ] + \\ &+\frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} v_t(s,0)\ ds + \\ &+\frac{1}{2}\int_T (v_{tt}-v_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{2}$$

   Sugerencia: la fórmula de Green en el plano nos dice que si $P, Q \in C^1(\overline{T}, \mathrm{R})$, *entonces* $\int_T (Q_x(x,t) - P_t(x,t))\ dx\ dt = \int_{\partial T}(P\ dx + Q\ dt)$.

   (b) (**0.5 puntos**) Defínase con precisión el concepto de solución de (1) y usando la fórmula anterior, pruébese que (1) puede tener, a lo sumo, una solución. Propóngase, además, la fórmula que puede proporcionar la única solución de (1).

   (c) (**1.5 puntos**) Impónganse hipótesis apropiadas a las funciones f, α y β y demuéstrese que la fórmula propuesta en el apartado anterior define la única solución de (1).

2. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**)

   (a) (**0.5 puntos**) Enúnciese la propiedad del valor medio para funciones armónicas, tanto para bolas como para esferas.

   (b) (**1.5 puntos**) Usando la propiedad anterior, enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.

   (c) (**1 punto**) Considésere el problema de Dirichlet

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega \tag{3}$$

   donde Ω es un dominio acotado de R^n. Supongamos la hipótesis siguiente:
   (H): la única solución de (3) se puede calcular explícitamente siempre que la función f es un polinomio.
   Sea ahora la función $f_0 : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, definida como $f_0(x) = e^{x_1},\ \forall\ x \in \mathrm{R}^n$ y u_{f_0} la única solución de (3) con dato frontera f_0. Usando la hipótesis **(H)** y el principio del máximo-mínimo, demuéstrese que existe una sucesión de funciones $\{u_n\}$, que se puede calcular explícitamente, tal que $\{u_n\} \to u_{f_0}$ uniformemente en $\overline{\Omega}$.

3. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**)

   (a) (**0.5 puntos**) Enúnciese con precisión el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

   (b) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\quad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{4}$$

   Si $f \equiv 0$, la única solución de (4) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, la única solución de (4) es $u(x,t) = \operatorname{sen}(2x)e^{-4t}$.
   Si

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(2x), \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

   i. (**1 punto**) ¿Es la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(2x)e^{-4t}, \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

   solución de (4)? Si la respuesta es negativa, razónese adecuadamente cuál (o cuáles) de las condiciones en (4) no se cumplen.

   ii. (**1.5 puntos**) Calcúlese la única solución de (4).

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 20/09/2006.

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ 0 \le t, \\ &u(x,0) = f(x),\quad u_t(x,0) = g(x),\ 0 \le x \le \pi \end{aligned} \tag{ONH}$$

   (a) **(0.5 puntos)** Interprétese (ONH) desde el punto de vista de la Física.

   (b) **(1.5 puntos)** Defínase con precisión el concepto de solución de (ONH) y pruébese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución (sugerencia: método de la energía).

   (c) **(0.5 puntos)** Si f y g son funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \cos(nx),\quad g(x) = \sum_{n=0}^{p} b_n \cos(nx),$$

   siendo $a_n,\ 0 \le n \le m,\ b_n,\ 0 \le n \le p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (ONH)?

   (d) **(1 punto)** Enúnciese un teorema general de existencia de soluciones de (ONH), proporcionando la fórmula de la única solución.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**1.5 puntos**) Usando la propiedad del valor medio para funciones armónicas, enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para esta clase de funciones.

   (b) **(2 puntos)** Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi,$$
$$u_y(x,0) = 0,\ u_y(x,\pi) = 0,\ u(0,y) = \cos y,\ u(1,y) = \mathrm{sen}^2 y.$$

3. **(Valor total del ejercicio 3 puntos)**

(a) (**1.5 puntos**) Enunciado y demostración del principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

(b) (**1.5 puntos**) Cálculese la única solución del problema

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0; \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x,0) = \operatorname{sen}^3(x); \quad 0 \leq x \leq \pi$$

(Sugerencia: demuéstrese previamente que $\operatorname{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3x)$, $\forall x \in \mathrm{R}$).

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 2/05/2007.

(1) (**Valor del ejercicio: 2 puntos**) Sea Ω un abierto no vacío de R^n, $n \geq 2$. Demuéstrese rigurosamente que el espacio vectorial formado por todas las soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega$, tiene dimensión infinita.

(2) (**Valor total del ejercicio: 3.5 puntos**) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t, \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ 0 \leq t, \\ &u(x,0) = f(x),\ \ u_t(x,0) = g(x),\ 0 \leq x \leq \pi \end{aligned} \qquad (ONH)$$

(a) **(0.5 puntos)** Interprétese (ONH) desde el punto de vista de la Física.

(b) **(1.5 puntos)** Defínase con precisión el concepto de solución de (ONH) y pruébese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución.

(c) **(1 punto)** Si f y g son funciones de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos(nx), \quad g(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{p} b_n \cos(nx),$$

siendo $a_n,\ 0 \leq n \leq m,\ b_n,\ 0 \leq n \leq p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (ONH)?

(d) **(0.5 puntos)** Enúnciese un teorema general de existencia de soluciones de (ONH), proporcionando la fórmula de la única solución.

(3) (**Valor total del ejercicio: 4.5 puntos**)

(a) (**0.5 puntos**) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Demuéstrese rigurosamente que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\frac{2n-1}{2}x)e^{-(\frac{2n-1}{2})^2 t} = u(x,t) \tag{1}$$

es convergente para $t > 0$.

(b) (**2 puntos**) Si $v_n(x,t)$ es una sucesión de funciones de dos variables, definidas en subconjunto ω de $\mathbb{R}^2$ y $(x_0,t_0) \in \omega$, establézcanse condiciones precisas que permitan afirmar que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t)\right)_{(x_0,t_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v_n(x_0,t_0)}{\partial x} \tag{2}$$

Usando dichas condiciones, pruébese rigurosamente que la función u definida en (1), es $C^\infty(\Omega)$ donde $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$.

(c) (**1 punto**) Si, además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|$ es convergente, demuéstrese que la función u definida en (1) es de clase C^1 en $\overline{\Omega}$.

(d) (**1 punto**) Bajo las hipótesis del apartado anterior, para cada $T > 0$ dado escríbase con precisión, el problema de tipo mixto que verifica la función u en $[0,\pi] \times [0,T]$, incluyendo las condiciones de contorno y las condiciones en el tiempo inicial $t = 0$.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 15/06/2007

(1) (**valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

(a) (**1.5 puntos**) Demuéstrese, usando el método de la energía, que el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + h(x,t), \quad 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0\\ u(x,0) &= f(x), \qquad\qquad 0 \le x \le \pi, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), 0 \le x \le \pi\end{aligned}$$

$$u(0,t) = n(t), \qquad u(\pi,t) = m(t), \qquad t \ge 0.$$

tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([0,\pi] \times [0,+\infty))$.

(b) (**2 puntos**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos x + \mathrm{sen} x, && 0 \le x \le \pi, t > 0\\ u(x,0) &= \mathrm{sen} x, && 0 \le x \le \pi\\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi\\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0.\end{aligned}$$

(2) (**valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Considérese la ecuación de Laplace n-dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{1}$$

(a) (**1.5 puntos**) Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathrm{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (1) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0,+\infty) \to \mathrm{R}$ una función de clase $C^2(0,+\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0,\ \forall\, r \in (0,+\infty). \tag{2}$$

Recíprocamente, si v verifica (2) entonces $u(x) = v(\|x\|)$ verifica (1) en $\mathrm{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) (**2 puntos**) Teniendo en cuenta esto, calcúlese la única solución del problema

$$\Delta u(x,y) = x^2 + y^2,\ 1 < x^2 + y^2 < 4,$$

$$u(x,y) = 1,\ \text{si}\ \ x^2 + y^2 = 1; \quad u(x,y) = 2,\ \text{si}\ \ x^2 + y^2 = 4$$

(3) (**valor total del ejercicio 3 puntos**) Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ continua. Si $\delta > 0$ es fijo, considérese el problema de Cauchy

$$u_t = u_{xx},\ x \in \mathrm{R},\ t > 0,\ u(x, 0) = \varphi(x),\ x \in \mathrm{R},$$

donde $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ es cualquier función continua tal que $\varphi(x) = 0$ si $x \leq a - \delta$, $\varphi(x) = f(x)$ si $a < x < b$ y $\varphi(x) = f(b)$ si $x \geq b + \delta$.

(a) (**0.5 puntos**) Escribir la fórmula que da la única solución acotada, $u(x, t)$ de este problema de Cauchy.

(b) (**0.5 puntos**) Pruébese que $\lim_{t \to 0^+} u(x, t) = f(x)$, uniformemente en $[a, b]$.

(c) (**2 puntos**) Utilícese el desarrollo en serie de potencias del núcleo de la ecuación del calor para probar que para cualquier número real positivo ε, existe algún polinomio p_ε tal que $|f(x) - p_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall\ x \in [a, b]$. (Teorema de Aproximación de Weierstrass).

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 14/09/2007

(1) (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos.**)

(a) (**1.5 puntos**) Considérese la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ (x,t) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$

Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x + t,\ \mu = x - t$, la ecuación anterior se transforma en $u_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0,\ (\xi,\mu) \in \mathrm{R}^2$. Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ de (1). Pruébese que dicho conjunto es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

(b) (**2 puntos**) Considérese el problema $u_{xt}(x,t) = f(x,t),\ u(x,0) = \alpha(x),\ u_t(x,0) = \beta(x),\ (x,t) \in \mathrm{R}^2$, con f continua en R^2, $\alpha \in C^2(\mathrm{R})$, $\beta \in C^1(\mathrm{R})$. Demuéstrese que tiene solución $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ si y solamente si se verifica la relación $\beta'(x) = f(x,0),\ \forall\ x \in \mathrm{R}$ y que, en este caso, la solución no es única.

(2) (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

(a) (**2.5 puntos**) Enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

(b) (**1 punto**) Calcular la única solución del problema de tipo mixto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T,\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,\\
u(x,0) &= f(x), \qquad\quad 0 \le x \le \pi,
\end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ \text{si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(4x),\ \text{si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

(3) (**Valor total del ejercicio 3 puntos.**) Usando la propiedad del valor medio, que caracteriza a las funciones armónicas, y el principio del máximo-mínimo, pruébese rigurosamente el llamado Teorema de Harnack:

Sea Ω *un dominio acotado de* R^n *y* $\{u_n\}$ *una sucesión de funciones reales, cada una de las cuales es armónica en* Ω *y continua en* $\overline{\Omega}$. *Si la sucesión* $\{u_n\}$ *es uniformemente convergente en* $\partial\Omega$, *entonces* $\{u_n\}$ *converge uniformemente en* $\overline{\Omega}$ *a una función* u, *que es armónica en* Ω *y continua en* $\overline{\Omega}$.