Examenes de Física Matemática (Ecuaciones en Derivadas Parciales e Integrales)

Licenciatura en Física

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI)
LICENCIATURA EN FÍSICA
Segundo curso, 11/06/2008.

Nota. Los alumnos que se presentan para subir nota sólo deben realizar los ejercicios 2 y 3, siendo la puntuación de cada uno de ellos 5 puntos.

1. (**Valor total del ejercicio: 3 puntos**) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t, \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ 0 \leq t, \\ &u(x,0) = f(x),\quad u_t(x,0) = g(x),\ 0 \leq x \leq \pi \end{aligned} \qquad (ONH)$$

   (a) **(0.5 puntos)** Interprétese (ONH) desde el punto de vista de la Física.

   (b) **(1 punto)** Defínase con precisión el concepto de solución de (ONH) y pruébese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución.

   (c) **(1 punto)** Si f y g son funciones de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos(nx), \quad g(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{p} b_n \cos(nx),$$

   siendo $a_n,\ 0 \leq n \leq m,\ b_n,\ 0 \leq n \leq p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (ONH)?

   (d) **(0.5 puntos)** Enúnciese un teorema general de existencia de soluciones de (ONH), proporcionando la fórmula de la única solución.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Enúnciese con precisión el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

(b) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\
u(x,0) &= f(x), \qquad\quad 0 \le x \le \pi,
\end{aligned} \tag{1}$$

Si $f \equiv 0$, la única solución de (1) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, la única solución de (1) es $u(x,t) = \operatorname{sen}(2x)e^{-4t}$.
Si

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(2x), \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases} \tag{2}$$

i. (**1 punto**) ¿Es la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(2x)e^{-4t}, \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

solución de (1)? Si la respuesta es negativa, razónese adecuadamente cuál (o cuáles) de las condiciones en (1) no se cumplen.

ii. (**1.5 puntos**) Calcúlese la única solución de (1) para la función f dada en (2).

3. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

(a) (**1.5 puntos**) Enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.

(b) **(2 puntos)** Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi,$$
$$u_y(x,0) = 0,\ u_y(x,\pi) = 0,\ u(0,y) = \cos y,\ u(1,y) = \operatorname{sen}^2 y.$$

FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI), LICENCIATURA EN FÍSICA

Segundo curso, primer examen parcial, 31/03/2009.

1. Considérese el problema

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + h(x,t), \ a \le x \le b, \ t \ge 0$$

$$u(x,0) = f(x), \ a \le x \le b; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), \ a \le x \le b \tag{1}$$

$$u(a,t) = n(t), \quad u(b,t) = m(t), \ t \ge 0.$$

(a) (**3 puntos**) Defínase la energía de la onda $u(x,t)$ y pruébese rigurosamente que si $h \equiv 0, n(t) \equiv 0$ y $m(t) \equiv 0$, dicha energía es una constante k. ¿Cuánto vale la constante k?

(b) (**1 punto**) Usando el apartado anterior, pruébese que cuando los datos h, f, g, n y m son generales, (1) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([a,b] \times [0,+\infty))$.

(c) (**4 puntos**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos x + \operatorname{sen} x, && 0 \le x \le \pi, t > 0\\
u(x,0) &= \operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen}(5x) + \cos x + \frac{2}{\pi}x - 1, && 0 \le x \le \pi\\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0.
\end{aligned}$$

2. Considérese el problema de Cauchy (o de valores iniciales)

$$u_{xt}(x,t) = f(x,t), \ u(x,0) = \alpha(x), \ u_t(x,0) = \beta(x), \ (x,t) \in \mathrm{R}^2, \tag{2}$$

con $f \in C(\mathrm{R}^2)$, $\alpha \in C^2(\mathrm{R})$, $\beta \in C^1(\mathrm{R})$.

(a) (**0.5 puntos**) Demuéstrese que si (2) tiene solución $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$, entonces $\beta'(x) = f(x,0), \ \forall \ x \in \mathrm{R}$.

(b) (**1.5 puntos**). Pruébese que si $\beta'(x) = f(x,0), \ \forall \ x \in \mathrm{R}$, entonces (2) tiene infinitas soluciones.

FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI), LICENCIATURA EN FÍSICA

Segundo curso, segundo examen parcial, 02/06/2009.

1. (**3.5 puntos**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) &= 2\mathrm{sen}^3 x - 7\mathrm{sen} x, && 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

2. **(3.5 puntos)** Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ x^2 + y^2 < 1$$
$$u(x,y) = -3x^2 + 2y^2,\ x^2 + y^2 = 1$$

1. (**1 punto**) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Demuéstrese rigurosamente que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \mathrm{sen}(\frac{2n-1}{2} x) e^{-(\frac{2n-1}{2})^2 t} = u(x,t) \tag{1}$$

es convergente para $t > 0$.

2. (**1 punto**) Si, además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|$ es convergente, demuéstrese que la función u definida en (1) es de clase C^1 en $\overline{\Omega}$, donde $\Omega = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2 : t > 0\}$.

3. (**1 punto**) Bajo las hipótesis del apartado anterior, para cada $T > 0$ dado escríbase con precisión, el problema de tipo mixto que verifica la función u en $[0,\pi] \times [0,T]$, incluyendo las condiciones de contorno y las condiciones en el tiempo inicial $t = 0$.

FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI), LICENCIATURA EN FÍSICA

Segundo curso, examen final, 01/07/2009.

1. Considérese la ecuación de ondas unidimensional
$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ (x,t) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$
   (a) Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x + t,\ \mu = x - t$, la ecuación anterior se transforma en
$$u_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0,\ (\xi,\mu) \in \mathrm{R}^2 \tag{2}$$
   (b) Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ de (2) y usando el cambio de variable indicado, calcúlese el conjunto de soluciones de (1).
   (c) Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (1) y de (2) es un espacio vectorial real de dimensión infinita (se pueden encontrar infinitas soluciones linealmente independientes).
   (d) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden
$$u_{xy}(x,y) + a\ u_x(x,y) + bu_y(x,y) + abu(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \tag{3}$$
   donde a y b son constantes reales y $u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$. Mediante el cambio de variable $u(x,y) = v(x,y)e^{-ay-bx}$, encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (3).

2. (a) Escríbase de manera precisa la formulación de **problema de Cauchy para la ecuación del calor $n-$dimensional**, así como el concepto de solución del mismo.
   (b) Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy anterior, proporcionando además la fórmula que da la única solución.
   (c) Calcúlese la única solución acotada del problema de Cauchy
$$\begin{array}{c} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ x \in \mathrm{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \exp(-5x^2),\ x \in \mathrm{R}. \end{array} \tag{4}$$

3. Considérese el problema de Dirichlet
$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \partial\Omega. \end{array} \tag{5}$$
   Demuéstrese que mediante un cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\mathrm{sen}\phi$, el problema anterior se transforma en
$$\begin{array}{c} \dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0,\ 0 < \rho < 1,\ \phi \in \mathrm{R}, \\ \\ u(1,\phi) = g(\phi),\ \phi \in \mathrm{R}, \end{array} \tag{6}$$
   donde $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ está definida como $g(\phi) = f(cos\phi, sen\phi)$.

Alumnos que tienen que examinarse de los capítulos I, II, III y IV: ejercicio 1, apartados a) y b). Ejercicios 2 y 3 completos.

Alumnos que tienen que examinarse sólo de los capítulos I y II: ejercicio 1 completo (apartados a), b), c) y d)).

Alumnos que tienen que examinarse sólo de los capítulos III y IV: Ejercicios 2 y 3 completos.

Alumnos que quieran subir nota: ejercicios 1 y 2 completos. Ejercicio complementario.

Ejercicio complementario (para subir nota). Grupo B Sea $u : \Omega \to \mathrm{R}$ una función C^∞, donde Ω es un abierto de R^N. Sea $x \in \Omega$ fijo, y $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset \Omega$. Definimos:

$$f : [0, r) \to \mathrm{R}, \ f(t) = \frac{N}{\omega_N} \int_{B(0,1)} u(x + tz)\, dz,$$

donde $B(0, 1)$ es la bola unidad en R^N y ω_N es la medida de la esfera unidad $(N - 1)$-dimensional (por ejemplo, $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$).

a) ¿Cómo interpretas la función $f(t)$? ¿Cuánto vale $f(0)$?

b) Demostrar que:

$$f'(t) = t\frac{N}{2\omega_N} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + tz)\left(1 - |z|^2\right) dz.$$

Si u es una función armónica, ¿qué consecuencia obtenemos?

c) Calcular $f''(0)$ e interpretar el resultado.

Ejercicio complementario (para subir nota). Grupo A

1. Considérese el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathrm{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \alpha(x),\ x \in \mathrm{R}, \\ u_t(x,0) = \beta(x),\ x \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{7}$$

   (a) Sea $(x_0, t_0) \in \mathrm{R}^2$, tal que $t_0 > 0$ y T su triángulo característico. Pruébese que si v es cualquier función real perteneciente a $C^2(\overline{T})$, se tiene

$$\begin{aligned} v(x_0,t_0) &= \frac{1}{2}\,[v(x_0+t_0,0)\ +\ v(x_0-t_0,0)\,] + \\ &+\frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} v_t(s,0)\ ds + \\ &+\frac{1}{2}\int_T (v_{tt}-v_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

   Sugerencia: la fórmula de Green en el plano nos dice que si $P, Q \in C^1(\overline{T}, \mathrm{R})$, *entonces* $\int_T (Q_x(x,t) - P_t(x,t))\ dx\ dt = \int_{\partial T}(P\ dx + Q\ dt)$.

   (b) Defínase con precisión el concepto de solución de (7) y usando la fórmula anterior, pruébese que (7) puede tener, a lo sumo, una solución. Propóngase, además, la fórmula que puede proporcionar la única solución de (7).

   (c) Impónganse hipótesis apropiadas a las funciones f, α y β y demuéstrese que la fórmula propuesta en el apartado anterior define la única solución de (7).

FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI), LICENCIATURA EN FÍSICA

Segundo curso, examen parcial, 20/04/2010.

1. (2 puntos)

   Escríbanse de manera precisa: la ecuación de ondas $n-$dimensional, la ecuación del calor $n-$dimensional y la ecuación del potencial $n-$dimensional. Para cada una de las ecuaciones mencionadas, descríbase brevemente algún problema concreto de la Física donde tales ecuaciones desempeñen un papel importante.

2. (3 puntos)

   Sea $\xi \in \mathrm{R}^3$, dado. Considérese la función $v : \mathrm{R}^3 \setminus \{\xi\} \to \mathrm{R}$, dada por $v(x) = \|x - \xi\|^n$, donde n es un número entero negativo. Calcúlense los valores de n para los que la función v es armónica en $\mathrm{R}^3 \setminus \{\xi\}$.

3. (5 puntos)

   Aplíquese de manera razonada el método de separación de variables para encontrar la fórmula que proporcionaría la única solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) &= u_x(\pi,t) = 0, && t \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI), LICENCIATURA EN FÍSICA

Segundo curso, examen parcial, 07/06/2010.

1. (3 puntos)

   Sea $\omega = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y $T > 0$ dado. Definamos

   $$\Omega = \{(x,y,t) \in \mathrm{R}^3 : \ (x,y) \in \omega, \ 0 < t \leq T\}$$

   (a) (1 punto) Defínase adecuadamente $\partial_1 \Omega$, la frontera parabólica de Ω.

   (b) (2 puntos) Demuéstrese que para cualquier función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que verifique

   $$u_t(x,y,t) - \Delta_{(x,y)} \, u(x,y,t) > 0, \ \forall \ (x,y,t) \in \Omega,$$

   se tiene

   $$\min_{\overline{\Omega}} \ u = \min_{\partial_1 \Omega} \ u.$$

2. (4 puntos)

   Aplíquese de manera razonada el método de separación de variables, para encontrar la fórmula que proporcionaría la única solución del problema de contorno

   $$\begin{array}{c} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi, \\ u(x,0) = 0, \ u(x,\pi) = x(\pi - x), \ x \leq 0 \leq \pi, \\ u(0,y) = 0, \ = u(\pi,y) = 0, \ 0 \leq y \leq \pi. \end{array} \tag{1}$$

3. A elegir uno de los dos apartados siguientes:

   (a) (2 puntos) Calcúlese la única solución acotada del problema de valores iniciales

   $$\begin{array}{c} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \ \forall \ x \in \mathbf{R}, \forall \ t > 0, \\ u(x,0) = e^{-5x^2}, \ \forall \ x \in \mathbf{R}. \end{array}$$

   (b) (3 puntos) Calcúlese la única solución acotada del problema de valores iniciales

   $$\begin{array}{c} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \ \forall \ x \in \mathbf{R}, \forall \ t > 0, \\ u(x,0) = e^{-5x^2 + \mu x}, \ \forall \ x \in \mathbf{R}, \end{array}$$

   donde μ es un número real dado.

FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI), LICENCIATURA EN FÍSICA

Segundo curso, examen final, 14/06/2010.

1. (a) (2 puntos) Si $f \in C^1(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$, demuéstrese que la función

$$v(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\, dy \right) ds$$

verifica

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t) \ , \quad \forall (x,t) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$

(b) (1 punto) Teniendo en cuenta el resultado anterior, encontrar una fórmula que proporcione todas las soluciones de (1).

2. Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{C2}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

(a) (1.5 puntos) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

(b) (1.5 puntos) Aplíquese el método de separación de variables para encontrar soluciones elementales de (C2).

(c) (1 punto) Usando el apartado anterior, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C2).

3. Considérese la ecuación de Laplace $n-$dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{2}$$

y sea $\xi \in \mathbf{R}^n$ dado.

(a) (1.5 puntos) Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathrm{R}^n \setminus \{\xi\})$ es solución de (2) de la forma $u(x) = v(\|x - \xi\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0,\ \forall\, r \in (0, +\infty) \tag{3}$$

Recíprocamente, si $v \in C^2(0, +\infty)$ verifica (3) entonces $u(x) = v(\|x - \xi\|)$ verifica (2) en $\mathbf{R}^n \setminus \{\xi\}$.

(b) (1.5 puntos) Teniendo en cuenta el apartado anterior, calcúlese la única solución del problema

$$\Delta u(x, y) = 1,\ b^2 < x^2 + y^2 < a^2,$$
$$u(x, y) = 0,\ \text{si}\ \ x^2 + y^2 = b^2\ \ \text{ó}\ \ x^2 + y^2 = a^2$$