Análisis Matemático 3

Diplomatura de Estadística

Armando R. Villena Muñoz

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Índice general

CAPÍTULO 1

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Desde la antigüedad el hombre ha tenido que enfrentarse al problema de medir longitudes, áreas y volúmenes de figuras más o menos elementales; si bien de hecho la historia está llena de acontecimientos que así lo avalan, hay que constatar que la formalización de la teoría de la medida es reciente.

En términos generales el problema de medir en $\mathbb{R}^N$ consiste en asignar a cada subconjunto A de $\mathbb{R}^N$ su medida $\mu(A)$, con la que se pretende cuantificar su tamaño. Naturalmente esta asignación ha de poseer ciertas cualidades que nos dicta la razón, a saber

$$\mu(A) \geq 0$$

y

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$$

para cualesquiera conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ disjuntos entre sí. No obstante, el desarrollo exitoso de la teoría exige que la anterior condición de aditividad sea válida para cualquier sucesión (A_n) de conjuntos disjuntos entre sí, esto es

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Es también natural requerir que la medida asignada a las figuras más elementales posibles, esto es los intervalos N-dimensionales (rectángulos en dimensión dos u ortoedros en dimensión 3) venga dada por la fórmula tradicional. No todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ se pueden someter a estas reglas. Aquellos que sí lo hacen constituyen una familia, los conjuntos medibles, que goza de las propiedades que seguidamente codificamos.

1.1. Espacios de Medida

1.1.1. Definición y propiedades básicas

1.1.1 Definición (de σ-álgebra y de medida)**.** Sea Ω un conjunto no vacío. Una familia Σ de subconjuntos de Ω recibe el nombre de σ-*álgebra* si verifica las siguientes propiedades:

i. $\Omega \in \Sigma$.

ii. $A \in \Sigma \Rightarrow A^c := \Omega \backslash A \in \Sigma$.

iii. $[A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N}] \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

La pareja (Ω, Σ) se denomina *espacio medible* y los elementos de Σ se denominan *conjuntos medibles* .

Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Una *medida* sobre Σ es una aplicación

$$\mu : \Sigma \to [0, \infty]$$

verificando la siguiente propiedad conocida como σ-*aditividad*

$$\left[A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N},\, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)\right] \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Para evitar situaciones triviales, se supone siempre que existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) < \infty$. La terna (Ω, Σ, μ) se denomina *espacio de medida*.

En el caso particular de que $\mu(\Omega) = 1$ se dice que μ es una *probabilidad* y en esta situación se acostumbra a usar una terminología específica. Por ejemplo los conjuntos medibles reciben en esta situación el nombre de *sucesos*.

1.1.2 Proposición. *Sea* (Ω, Σ) *un espacio medible.*

1. *Se verifican las siguientes afirmaciones:*

   i. $\emptyset \in \Sigma$.

   ii. $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$.

   iii. $[A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N}] \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

   iv. $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B \in \Sigma$.

   v. $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \backslash B \in \Sigma$.

2. *Si μ es una medida sobre Σ, entonces:*

   i. $\mu(\emptyset) = 0$.

   ii. $[A, B \in \Sigma,\ A \cap B = \emptyset] \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ *(aditividad).*

   iii. $[A, B \in \Sigma,\ A \subset B] \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ *(monotonía).*

   iv. $[A_n \in \Sigma,\ A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}] \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *(crecimiento continuo).*

   v. $[A_n \in \Sigma,\ A_n \supset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(A_1) < \infty] \Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *(decrecimiento continuo).*

   vi. $[A, B \in \Sigma] \Rightarrow \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ *(subaditividad).*

   vii. $[A_n \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{N}] \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *(σ-subaditividad).*

Demostración. 1.i. Es consecuencia de las propiedades *i* y *ii* de la definición ya que $\Omega^c = \emptyset$.

1.ii. Basta tomar $A_1 = A$, $A_2 = B$ y $A_n = \emptyset$ $n = 3, 4, \ldots$ en la condición *iii* de la definición.

1.iii. Es consecuencia de las propiedades *ii* y *iii* de la definición ya que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c.$$

1.iv. Se prueba como el apartado 1.ii pero utilizando la propiedad 1.iii anterior.

1.v. Es consecuencia de la igualdad $A \backslash B = A \cap B^c$ usando 1.iv y el axioma ii de la definición.

2.i. Tomemos $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) < \infty$, entonces

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset \cup \emptyset \ldots) = \mu(A) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \ldots,$$

luego $\mu(\emptyset) = 0$.

2.ii. $\mu(A \cup B) = \mu(A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots) = \mu(A) + \mu(B) + 0 + 0 + \ldots = \mu(A) + \mu(B)$.

2.iii. $\mu(A) \leq \mu(A) + \mu(B \backslash A) = \mu(A \cup (B \backslash A)) = \mu(B)$.

2.iv. Pongamos $B_1 = A_1$ y $B_{n+1} = A_{n+1} \backslash A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se tiene que:

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

con lo que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \big(\mu(B_1)+\ldots+\mu(B_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

donde se ha utilizado el axioma de σ-aditividad, la definición de suma de una serie y la propiedad de aditividad finita (propiedad 2.ii de este resultado).

2.v. La propiedad de aditividad finita nos asegura para $n \in \mathbb{N}$ que

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \backslash A_n) + \mu(A_n)$$

y también que

$$\mu(A_1) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \mu\left(A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

con lo que al ser $\mu(A_1) < \infty$, utilizando además la propiedad 2.iv, se tiene

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(A_1 \backslash \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \backslash A_n)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \backslash A_n) = \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

de donde obviamente se deduce la propiedad 2.v.

2.vi. $\mu(A\cup B) = \mu(A\cup(B\backslash A)) = \mu(A) + \mu(B\backslash A) \le \mu(A) + \mu(B)$.

2.vii. Pongamos $B_n = \cup_{k=1}^{n} A_k, \forall n \in \mathbb{N}$. Se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

donde se han utilizado 2.iv, 2.vi y el concepto de suma de una serie. □

1.1.3 Definición (Propiedad c.p.d.)**.** Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Se dice que una propiedad $P(\omega)$ relativa a un punto genérico $\omega \in \Omega$ se verifica *casi por doquier* (lo cual abreviaremos por *c.p.d.*) con respecto a μ si el conjunto de puntos donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida cero. Se omite la referencia a la medida μ si no hay lugar a confusión.

Observación 1.1.4. Obsérvese que ahora la σ-subaditividad asegura que, en cualquier espacio de medida, *la unión numerable de conjuntos de medida cero es de medida cero.*

En particular, Si (P_n) es una sucesión de propiedades relativas a un punto genérico $\omega \in \Omega$ tal que cada una de las cuales se verifica c.p.d., entonces se verifican todas simultáneamente c.p.d., es decir, si se considera la propiedad P determinada por: P se verifica en ω si, y sólo si, todas las P_n se verifican en ω, entonces P se verifica c.p.d. En efecto, si para cada n natural $E_n \subset \Omega$ es el conjunto de medida cero en el que no se verifica P_n, entonces el conjunto

$$E := \{\omega \in \Omega : \ \ P \text{ no se verifica en } \omega\}$$

es de medida cero, pues $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

1.1.2. Ejemplos

1. La σ-álgebra generada por una familia de subconjuntos de Ω.

Sea Ω un conjunto no vacío cualquiera. La familia $\mathcal{P}(\Omega)$ constituida por todos los subconjuntos de Ω es una σ-álgebra en Ω. Si $\{\Sigma_i : i \in I\}$ es una familia de σ-álgebras en Ω, entonces $\Sigma = \cap_{i\in I}\Sigma_i$ es una σ-álgebra en Ω. En consecuencia si $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, entonces la intersección de todas las σ-álgebras en Ω que contienen a $\mathcal{S}$ (entre las cuales hay al menos una: $\mathcal{P}(\Omega)$) es la menor σ-álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{S}$ y recibe el nombre de σ-*álgebra generada por* $\mathcal{S}$.

2. La σ-álgebra de Borel y la medida de Borel.

La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^N$ es la σ-álgebra generada por la familia de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$. En lo sucesivo se notará por $\mathcal{B}$ y sus elementos se denominan conjuntos *borelianos*.

Es claro que los conjuntos cerrados son borelianos, así como que $\mathcal{B}$ está generada también por la familia de todos los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^N$. De hecho $\mathcal{B}$ contiene las siguientes familias de subconjuntos topológicamente relevantes:

i. Conjuntos del tipo G_δ que son aquellos conjuntos que se pueden expresar como intersección numerable (y decreciente, si se quiere) de abiertos.

ii. Conjuntos del tipo F_σ que son aquellos conjuntos que se pueden expresar como unión numerable de cerrados. Es inmediato comprobar que un conjunto B del tipo F_σ se puede expresar como unión numerable y creciente de conjuntos compactos. En efecto si $B = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, es una expresión de B como unión de cerrados, también B se puede expresar de la forma $B = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde para cada n

$$K_n = \overline{B}(0,n) \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_n).$$

Se verá más adelante que $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra generada por los intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$. La relevancia de esta σ-álgebra radica en el hecho de que *existe una única medida sobre $\mathcal{B}$ que extiende el volumen de los intervalos acotados*. Esta medida recibe el nombre de *medida de Borel*, se nota por λ y se puede describir de la siguiente manera:

$$\lambda(B) = \text{ínf}\left\{\sum_{n=}^{\infty} v(I_n) : \ B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \ I_n \text{ intervalo acotado de } \mathbb{R}^N\right\}$$

para todo $B \in \mathcal{B}$.

La expresión que define la medida de Borel tiene perfecto sentido para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^N$ dando lugar a la llamada *medida exterior de Lebesgue*, λ^*. Desgraciadamente λ^* no es una medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

3. La σ-álgebra y la medida de Lebesgue.

La σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ (que presentamos en el tema siguiente), se nota por $\mathcal{M}$ y es la mayor σ-álgebra en $\mathbb{R}^N$ que contiene a los intervalos acotados y sobre la cual la medida exterior de Lebesgue es aditiva. De hecho la restricción de λ^* a $\mathcal{M}$ es la única medida sobre $\mathcal{M}$ que extiende el volumen de los intervalos acotados. Esta medida recibe el nombre de medida de Lebesgue y la notaremos también por λ.

Curiosamente $\mathcal{M}$ es sólo un ligero agrandamiento de $\mathcal{B}$, de hecho es la *completación* de $\mathcal{B}$, es decir:

$$\mathcal{M} = \{B \cup Z : \ B \in \mathcal{B},\ Z \subset A \in \mathcal{B} \text{ con } \lambda^*(A) = 0\}$$

y para $B \cup Z$ con $B \in \mathcal{B}$ y $Z \subset A \in \mathcal{B}$ con $\lambda(A) = 0$ se define $\lambda(B \cup Z) = \lambda(B)$.

4. La σ-álgebra y la medida inducida.

Si (Ω, Σ) es un espacio medible y E es un subconjunto medible de Ω no vacío, es inmediato comprobar que

$$\Sigma_E := \{E \cap A : A \in \Sigma\} \quad (= \{A \in \Sigma : A \subset E\})$$

es una σ-álgebra en E, que se denomina *σ-álgebra inducida*.

Si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida y E es un subconjunto medible no vacío de Ω, es inmediato probar que la restricción, μ_E, de μ a la σ-álgebra Σ_E es una medida sobre Σ_E que se denomina *medida inducida*. En lo sucesivo cualquier subconjunto medible no vacío de un espacio medible (resp. de medida) se considerará como un espacio medible (resp. de medida) con la σ-álgebra (resp. la medida) inducida. La terna (E, Σ_E, μ_E) se denomina *espacio de medida inducido*.

5. La medida contadora.

Sea Ω un conjunto no vacío cualquiera. Se considera $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ y se define μ sobre Σ por

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{número de elementos de } A & \text{si } A \text{ es finito} \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

En el caso particular de que el conjunto Ω sea finito con n elementos, la medida ν definida por $\nu(A) = \frac{\mu(A)}{n}$ es una probabilidad.

6. Medidas de Dirac.

Sea Ω un conjunto no vacío cualquiera y sea $\omega \in \Omega$. Se considera $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ y se define δ_ω sobre Σ por

$$\delta_\omega(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

7. Sea $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Se consideran $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$. Se define una probabilidad $\mathbb{P}$ en Ω mediante la expresión

$$\mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

para todo $k \in \Omega$.

1.2. Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

1.2.1. Medida exterior de Lebesgue

Comenzamos ahora la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Como anunciábamos, el germen de dicha construcción es el volumen de los intervalos de dimensión N, concepto que precisamos a continuación.

1.2.1 Definición (Volumen de un intervalo de dimensión N)**.** Un *intervalo* en $\mathbb{R}^N$ es un conjunto de la forma

$$I = I_1 \times \cdots \times I_N$$

donde $I_1, , \ldots, I_N$ son intervalos (cada uno de ellos de cualquier tipo, abierto, cerrado o semiabierto, acotado o no) de $\mathbb{R}$. Cuando el intervalo I es acotado y no vacío se define su *volumen* por:

$$v(I) := (\sup I_1 - \inf I_1) \cdots (\sup I_N - \inf I_N).$$

Por coherencia convenimos que $v(\emptyset) = 0$.

Si $N = 1$ el volumen 1-dimensional de un intervalo acotado $I \subset \mathbb{R}$ se llama la *longitud* de I y se representa por $\ell(I)$. Para $N = 2$ ($N = 3$) el volumen 2-dimensional (3-dimensional) de un intervalo acotado en $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$), que no es otra cosa que un rectángulo (ortoedro) de lados paralelos a los ejes, es el *área* (*volumen*) de dicho rectángulo (ortoedro).

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^N$, la manera más natural en la que cabe pensar medir A es sin duda la que da la siguiente definición.

1.2.2 Definición (de la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$)**.** La *medida exterior de Lebesgue*, λ^*, en $\mathbb{R}^N$ es por definición la aplicación

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, \infty]$$

dada por

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) : \ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \ I_n \text{ intervalo acotado de } \mathbb{R}^N \right\} \in [0, \infty]$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^N$ (obviamente, existen sucesiones (I_n) de intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$ que verifican las condiciones exigidas en la definición).

Desgraciadamente la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ no es ni tan siquiera aditiva y por tanto no es una medida. Está sin embargo bastante cerca de serlo, en el sentido de que la restricción de esta medida exterior a una conveniente σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ si que es una medida. La mayor σ-álgebra para la que esto ocurre es la llamada σ-álgebra de Lebesgue de $\mathbb{R}^N$ que presentamos seguidamente.

1.2.3 Definición (de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$)**.** La *medida de Lebesgue*, λ, en $\mathbb{R}^N$ es la restricción de la medida exterior de Lebesgue a la σ-álgebra $\mathcal{M}$ definida por

$$\mathcal{M} = \{B \cup Z : \ B \in \mathcal{B}, \ Z \subset \mathbb{R}^N \text{ con } \lambda^*(Z) = 0\}.$$

Respecto de la definición anterior, hemos de advertir que debemos aun justificar que el conjunto $\mathcal{M}$ considerado es efectivamente una σ-álgebra y por supuesto debemos justificar el calificativo de medida que hemos atribuido a la restricción de la medida exterior de Lebesgue a $\mathcal{M}$. Esta será la principal labor que llevaremos a cabo en este tema.

Puesto que todo intervalo acotado de $\mathbb{R}^N$ está contenido en un intervalo acotado que además es abierto y cuyo volumen es tan próximo al volumen del intervalo original como se quiera se puede establecer la siguiente identidad que es crucial para demostrar que $\lambda^*(I) = v(I)$ para cualquier intervalo acotado I de $\mathbb{R}^N$.

1.2.4 Proposición.

$$\lambda^*(A) = \text{ínf}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) : \ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \ I_n \textit{ intervalo abierto y acotado de } \mathbb{R}^N \right\}$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^N$.

Demostración. Para abreviar notamos por $\alpha(A)$ al segundo miembro de la igualdad a demostrar. Es claro que $\lambda^*(A) \leq \alpha(A)$. Si $\lambda^*(A) = \infty$, entonces $\lambda^*(A) = \alpha(A)$. Supongamos ahora que $\lambda^*(A) < \infty$ y probemos que $\alpha(A) \leq \lambda^*(A)$. Observemos que si $I = I_1 \times \ldots \times I_N$ es un intervalo acotado, y si para $0 < \delta$ definimos

$$I(\delta) :=]\,\text{ínf} I_1 - \delta, \sup I_1 + \delta[\times \cdots \times]\,\text{ínf} I_N - \delta, \sup I_N + \delta[,$$

entonces se tiene que $I(\delta)$ es un intervalo abierto acotado con $I \subset I(\delta)$ y claramente se verifica que

$$\lim_{\delta \to 0} v(I(\delta)) = v(I).$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, tomemos una sucesión (I_n) de intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$ tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) \leq \lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como acabamos de ver, existe para cada $n \in \mathbb{N}$ un intervalo abierto acotado J_n tal que

$$I_n \subset J_n \text{ y } v(J_n) \leq v(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Concluimos que

$$\alpha(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(J_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(v(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$$

y por tanto $\alpha(A) \leq \lambda^*(A)$. $\square$

Seguidamente exponemos las propiedades básicas de la medida exterior de Lebesgue.

1.2.5 Proposición. *La medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ satisface las siguientes propiedades:*

i. $\lambda^*(\emptyset) = 0$.

ii. $[A, B \subset \mathbb{R}^N,\ A \subset B] \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ *(monotonía).*

iii. $[A_n \subset \mathbb{R}^N, \forall n \in \mathbb{N}] \Rightarrow \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$ *(σ-subaditividad).*

Demostración. i. Es inmediata ya que el vacío es un intervalo acotado de volumen cero.

ii. Es consecuencia de que si una sucesión (I_n) de intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$ cubre B también cubre A.

iii. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) = \infty$, no hay nada que probar. En otro caso sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos una sucesión $(I_{m,n})$ de intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$ que cubre A_n y tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} v(I_{m,n}) \leq \lambda^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Denotemos $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Si σ es cualquier biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_{\sigma(k)}$ deducimos, teniendo en cuenta el Apéndice 1.4.1, que

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} v(I_{\sigma(k)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v(I_{m,n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \varepsilon$$

y la arbitrariedad de ε demuestra la σ-subaditividad. $\square$

1.2.6 Definición (de medida exterior)**.** Sea Ω un conjunto no vacío. Una *medida exterior* en Ω es por definición una aplicación

$$\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$$

verificando las siguientes propiedades:

i. $\mu^*(\emptyset) = 0$.

ii. $[A, B \subset \Omega,\ A \subset B] \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonía).

iii. $[A_n \subset \Omega, \forall n \in \mathbb{N}] \Rightarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ (σ-subaditividad).

1.2.7 Proposición (Regularidad de la medida exterior de Lebesgue)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$. Existe $B \subset \mathbb{R}^N$ boreliano tal que $A \subset B$ y $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.*

Demostración. Si $\lambda^*(A) = \infty$ podemos tomar $B = \mathbb{R}^N$. En otro caso para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $(I_{m,n})$ de intervalos abiertos acotados tal que $A_n \subset \cup_{m=1}^{\infty} I_{m,n}$ y $\sum_{m=1}^{\infty} v(I_{m,n}) \leq \lambda^*(A) + \frac{1}{n}$. En consecuencia el conjunto $G_n = \cup_{m=1}^{\infty} I_{m,n}$ es un abierto que contiene a A y verifica $\lambda^*(G_n) \leq \lambda^*(A) + \frac{1}{n}$. Finalmente el conjunto $B = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$ es un boreliano (de tipo G_δ) que verifica $A \subset B \subset G_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego

$$\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) \leq \lambda^*(G_n) \leq \lambda^*(A) + \frac{1}{n},$$

con lo que $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$. □

Del resultado anterior y de las propiedades de la medida de Borel-Lebesgue se deduce el siguiente resultado.

1.2.8 Proposición. *Sea (A_n) una sucesión creciente de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$. Entonces*

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n).$$

Demostración. Como para cada n natural se tiene que $A_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, deducimos de la monotonía de la medida exterior que $\lambda^*(A_n) \leq \lambda^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, y en consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Para probar la desigualdad contraria podemos suponer que $\lim \lambda^*(A_n) < \infty$. Para cada natural n se puede elegir un boreliano B_n tal que $A_n \subset B_n$ y $\lambda^*(A_n) = \lambda(B_n)$. Notemos $C_n = \cup_{k=1}^{n} B_k$. Es claro que (C_n) es una sucesión creciente de borelianos tal que

$$\lambda^*(A_n) \leq \lambda(C_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Probemos por inducción que

$$\lambda^*(A_n) = \lambda(C_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se tiene que $\lambda^*(A_1) = \lambda(C_1)$ y para cada n natural que

$$\lambda(C_{n+1}) - \lambda(C_n) = \lambda(C_{n+1} \setminus C_n) = \lambda(B_{n+1} \setminus (B_{n+1} \cap C_n)) =$$

$$\lambda(B_{n+1}) - \lambda(B_{n+1} \cap C_n) \leq \lambda(B_{n+1}) - \lambda^*(A_n) = \lambda^*(A_{n+1}) - \lambda^*(A_n),$$

donde se ha utilizado la hipótesis de inducción. Del desarrollo anterior y teniendo en cuenta de nuevo la hipótesis de inducción

$$\lambda(C_{n+1}) \leq \lambda^*(A_{n+1}),$$

y por tanto
$$\lambda(C_{n+1}) = \lambda^*(A_{n+1}).$$
Por último, utilizando el crecimiento continuo de la medida de Borel-Lebesgue, concluimos
$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim \lambda(C_n) = \lim \lambda^*(A_n).$$
□

1.2.2. Existencia y unicidad de la medida de Lebesgue

Disponemos ya del bagaje necesario para presentar el teorema fundamental de la lección en el que se describe el espacio de medida $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}, \lambda)$.

1.2.9 Teorema (de existencia y unicidad de la medida de Lebesgue)**.**

i. La familia de subconjuntos $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^N$ definida como sigue
$$\mathcal{M} = \{B \cup Z : \ B \in \mathcal{B},\ Z \subset \mathbb{R}^N \text{ con } \lambda^*(Z) = 0\}$$
es una σ-álgebra en $\mathbb{R}^N$ que contiene a los intervalos acotados.

ii. La restricción a $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{B}$) de la medida exterior de Lebesgue es la única medida sobre $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{B}$) que extiende el volumen de los intervalos acotados.

Demostración. i. Es claro que $\mathbb{R}^N \in \mathcal{M}$. Si $A \cup Z \in \mathcal{M}$, con $A \in \mathcal{B}$ y $\lambda^*(Z) = 0$, entonces, en virtud de la regularidad de la medida exterior de Lebesgue (Proposición 1.2.7), existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $Z \subset B$ y $\lambda^*(B) = 0$. En esta situación podemos escribir
$$(A \cup Z)^c = A^c \cap Z^c = A^c \cap [B^c \cup (Z^c \cap B)] = [A^c \cap B^c] \cup [A^c \cap (Z^c \cap B)],$$
y por tanto $(A \cup Z)^c = A' \cup Z'$, siendo $A' = A^c \cap B^c \in \mathcal{B}$ y $Z' = A^c \cap (Z^c \cap B)$ que satisface $\lambda^*(Z') \leq \lambda^*(B) = 0$, por lo que $(A \cup Z)^c \in \mathcal{M}$.

Si ahora $(A_n \cup Z_n)$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{M}$ con $A_n \in \mathcal{B}$ y $\lambda^*(Z_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup Z_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) \in \mathcal{M}$$
puesto que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$ y $\lambda^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} Z_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(Z_n) = 0$.

Finalmente observemos que todo intervalo acotado de $\mathbb{R}^N$ es unión de un intervalo abierto, y por tanto boreliano, y el conjunto Z unión de sus eventuales caras que claramente verifica $\lambda^*(Z) = 0$.

ii. La prueba de este apartado es laboriosa. Comprobaremos ahora que la restricción de λ^* a $\mathcal{M}$ es una medida. Supuesto que λ^* sea aditiva en la σ-álgebra $\mathcal{M}$ obsérvese que para cualquier $E \in \mathcal{M}$ necesariamente ha de satisfacerse que

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E)$$

para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^N$. En efecto, dado $A \subset \mathbb{R}^N$ sea $B \in \mathcal{B}$ con $A \subset B$ y $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$ (Proposición 1.2.7). Se tiene

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap E) + \lambda^*(B \setminus E) \geq \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E)$$

y la subaditividad de λ^* (es inmediato que una medida exterior es subaditiva) nos permite concluir que la anterior desigualdad es de hecho una igualdad. Es natural entonces considerar la familia

$$\mathcal{C} = \{E \subset \mathbb{R}^N : \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E), \ \forall A \subset \mathbb{R}^N\}.$$

Probaremos seguidamente las siguientes afirmaciones:

a) $\mathcal{C}$ es una σ-álgebra y λ^* es una medida sobre $\mathcal{C}$.

b) La σ-álgebra $\mathcal{M}$ está contenida en la σ-álgebra $\mathcal{C}$.

Como consecuencia de estos apartados se concluye que λ es una medida.

a) Es inmediato comprobar que $\mathbb{R}^N \in \mathcal{C}$ y que para cualquier $A \in \mathcal{C}$ también $A^c \in \mathcal{C}$. Dados $E, F \in \mathcal{C}$ y $A \subset \mathbb{R}^N$, tenemos:

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap E^c) =$$

$$\lambda^*(A \cap E \cap F) + \lambda^*(A \cap E \cap F^c) + \lambda^*(A \cap E^c \cap F) + \lambda^*(A \cap E^c \cap F^c).$$

Al sustituir A por $A \cap (E \cup F)$ queda

$$\lambda^*(A \cap (E \cup F)) = \lambda^*(A \cap E \cap F) + \lambda^*(A \cap E \cap F^c) + \lambda^*(A \cap E^c \cap F), \tag{1.1}$$

y por tanto

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap (E \cup F)) + \lambda^*(A \cap E^c \cap F^c) = \lambda^*(A \cap (E \cup F)) + \lambda^*(A \cap (E \cup F)^c).$$

Obtenemos así que $E \cup F \in \mathcal{C}$. Por inducción se sigue que la unión finita de conjuntos de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{C}$.

Sean ahora $E, F \in \mathcal{C}$ disjuntos, por (1.1) se tiene:

$$\lambda^*(A \cap (E \cup F)) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap F),$$

para cada subconjunto A de $\mathbb{R}^N$. Si ahora $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{C}$ son disjuntos dos a dos, obtenemos por inducción que:

$$\lambda^*(A \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_n)) = \lambda^*(A \cap E_1) + \ldots + \lambda^*(A \cap E_n), \tag{1.2}$$

para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^N$. Sea finalmente (E_n) una sucesión de elementos de $\mathcal{C}$ disjuntos dos a dos y pongamos $F_n = E_1 \cup \ldots \cup E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap F_n) + \lambda^*(A \setminus F_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_k) + \lambda^*(A \setminus F_n) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \lambda^*(A \cap E_k) + \lambda^*(A \setminus E),$$

donde se ha usado (1.2) y la monotonía de λ^*. Haciendo que $n \to \infty$ y usando la σ-subaditividad y la subaditividad de λ^*, obtenemos

$$\lambda^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap E_n) + \lambda^*(A \backslash E) \geq \lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) \right) + \lambda^*(A \setminus E) =$$

$$= \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E) \geq \lambda^*(A),$$

lo que demuestra que $E \in \mathcal{C}$ y que:

$$\lambda^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap E_n) + \lambda^*(A \setminus E), \tag{1.3}$$

para todo subconjunto A de $\mathbb{R}^N$. Tomando $A = E$ en (1.3) obtenemos la σ-aditividad de λ^*, es decir

$$\left[E_n \in \mathcal{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ E_i \cap E_j = \emptyset (i \neq j)\right] \Rightarrow \lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n).$$

Probemos finalmente que la unión numerable de elementos de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{C}$. En primer lugar si $E, F \in \mathcal{C}$, se tiene que $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c \in \mathcal{C}$ y en consecuencia $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{C}$. Sea ahora una sucesión cualquiera (E_n) de elementos de $\mathcal{C}$. Definimos por recurrencia

$$F_1 := E_1$$

y

$$F_{n+1} := E_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k.$$

De lo ya demostrado $F_n \in \mathcal{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Claramente dichos conjuntos son disjuntos dos a dos por lo que concluimos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{C}.$$

b) Supongamos que S es un semiespacio de $\mathbb{R}^N$ del tipo:

$$\{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \ x_i < \alpha\} \ \text{(resp. } \leq, >, \geq),$$

para algún i con $1 \le i \le d$ y algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Veamos que $S \in \mathcal{C}$. Si $A \subset \mathbb{R}^N$ y $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ siendo I_n un intervalo acotado de $\mathbb{R}^N$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces los intervalos $I_n \cap S$ recubren $A \cap S$ y los intervalos $I_n \setminus S$ recubren $A \setminus S$ y por tanto se verifica

$$\lambda^*(A \cap S) + \lambda^*(A \setminus S) \le$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n \cap S) + \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n \setminus S) = \sum_{n=1}^{\infty} (v(I_n \cap S) + v(I_n \setminus S)) = \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n).$$

Consecuentemente $\lambda^*(A \cap S) + \lambda^*(A \setminus S) \le \lambda^*(A)$ y la subaditividad de la medida exterior nos permite concluir que la anterior desigualdad es de hecho una igualdad y que por tanto $S \in \mathcal{C}$. Como cualquier intervalo acotado de $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como la intersección de $2N$ semiespacios del tipo anterior y éstos pertenecen a $\mathcal{C}$ podemos asegurar que también los intervalos acotados pertenecen a $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra generada por los intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$ podemos ahora concluir que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Supongamos finalmente que $Z \subset \mathbb{R}^N$ verifica que $\lambda^*(Z) = 0$. Para cualquier $A \subset \mathbb{R}^N$ se tiene entonces

$$\lambda^*(A \cap Z) + \lambda^*(A \setminus Z) = \lambda^*(A \setminus Z) \le \lambda^*(A),$$

donde se ha utilizado la monotonía de λ^*. La subaditividad de λ^* nos permite concluir que la anterior desigualdad es de hecho una igualdad y por tanto $Z \in \mathcal{C}$. Hemos probado que $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ (de hecho probaremos enseguida que ambas σ-álgebras coinciden).

Una vez probado que λ es una medida, demostraremos ahora que extiende el volumen de los intervalos acotados, esto es,

$$\lambda(I) = v(I),$$

para todo intervalo acotado I de $\mathbb{R}^N$. Esta es sin duda la parte más difícil del teorema. Supongamos que I es un intervalo acotado de $\mathbb{R}^N$. Es claro que $\lambda(I) \le v(I)$, pues I es un recubrimiento de sí mismo. En consecuencia si $v(I) = 0$, también $\lambda(I) = 0$. Para probar la igualdad en el caso $v(I) > 0$, observemos que si $I = I_1 \times \ldots \times I_N$, y para cada δ tal que

$$0 < \delta < \frac{1}{2} \text{mín}\{\sup I_1 - \text{ínf} I_1, \ldots, \sup I_N - \text{ínf} I_N\}$$

definimos

$$I(\delta) = [\text{ínf} I_1 + \delta, \sup I_1 - \delta] \times \ldots \times [\text{ínf} I_N + \delta, \sup I_N - \delta],$$

se tiene que $I(\delta)$ es un intervalo cerrado tal que $I(\delta) \subset I$ y

$$\lim_{\delta \to 0, \delta > 0} v(I(\delta)) = v(I).$$

Fijado $\varepsilon > 0$, podemos en consecuencia tomar un intervalo cerrado K contenido en I tal que

$$v(I) < v(K) + \varepsilon.$$

Sea (I_n) una sucesión de intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R}^N$ que recubran I y tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) \leq \lambda(I) + \varepsilon.$$

Puesto que K es compacto ha de ocurrir que $K \subset I_1 \cup \ldots \cup I_m$ para conveniente $m \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que

$$v(K) \leq v(I_1) + \ldots + v(I_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) \leq \lambda(I) + \varepsilon$$

(para comprobar la primera desigualdad véase el Apéndice 1.4.2), y por tanto $v(I) < \lambda(I) + 2\varepsilon$. Como quiera que la anterior desigualdad es válida para cualquier positivo ε podemos concluir que $v(I) \leq \lambda(I)$ y en consecuencia $\lambda(I) = v(I)$.

Sea μ una medida definida sobre la σ-álgebra $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{B}$) que extiende el volumen de los intervalos acotados. Probemos que para cualquier conjunto medible E se tiene que $\mu(E) \leq \lambda(E)$. En efecto sea (I_n) una sucesión de intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$ tales que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

De la monotonía y la σ-subaditividad de la medida μ se deduce que

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n)$$

y en consecuencia

$$\mu(E) \leq \lambda^*(E) = \lambda(E).$$

Conviene resaltar que hemos probado que cualquier medida que extienda el volumen de los intervalos (definida sobre cualquier σ-álgebra que contenga los intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$ es más pequeña que la medida exterior de Lebesgue.

Probemos ahora la desigualdad contraria. Sea $E \in \mathcal{M}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $I_n = [-n,n] \times \cdots \times [-n,n]$. En virtud de la propiedad antes mostrada tenemos que

$$\mu(I_n) - \mu(I_n \cap E) = \mu(I_n \setminus (I_n \cap E)) \leq \lambda(I_n \setminus (I_n \cap E)) = \lambda(I_n) - \lambda(I_n \cap E)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia $\lambda(I_n \cap E) \leq \mu(I_n \cap E)$ Como $\lim \lambda(I_n \cap E) = \lambda(E)$ y $\lim \mu(I_n \cap E) = \mu(E)$ podemos concluir que efectivamente $\lambda(E) \leq \mu(E)$. $\square$

Existe una magnífica relación entre la medida de Lebesgue y la topología de $\mathbb{R}^N$ que recogemos en el siguiente resultado.

1.2.10 Teorema. *Sea $E \subset \mathbb{R}^N$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i. $E \in \mathcal{M}$.

ii. $\lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E)$, $\forall A \subset \mathbb{R}^N$.

iii. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G \subset \mathbb{R}^N$ *abierto tal que* $E \subset G$ *y* $\lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$.

iv. $\exists A \subset \mathbb{R}^N$ *de tipo* G_δ *tal que* $E \subset A$ *y* $\lambda^*(A \setminus E) = 0$.

v. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F \subset \mathbb{R}^N$ *cerrado tal que* $F \subset E$ *y* $\lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$.

vi. $\exists B \subset \mathbb{R}^N$ *de tipo* F_σ *tal que* $B \subset E$ *y* $\lambda^*(E \setminus B) = 0$.

Si E es medible, entonces se verifican las siguientes identidades:

$$\lambda(E) = \text{ínf}\{\lambda(G) : \ G \subset \mathbb{R}^N \text{ abierto, } E \subset G\} \text{ (regularidad exterior)}$$
$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : \ K \subset \mathbb{R}^N \text{ compacto, } K \subset E\} \text{ (regularidad interior).}$$

Demostración. Comenzamos probando que para $E \subset \mathbb{R}^N$ se verifica

$$\lambda^*(E) = \text{ínf}\{\lambda(G) : \ G \subset \mathbb{R}^N \text{ abierto, } E \subset G\},$$

lo que es una generalización de la regularidad exterior. Notemos por comodidad

$$\alpha = \text{ínf}\{\lambda(G) : G \subset \mathbb{R}^N \text{ abierto, } E \subset G\}.$$

Por monotonía es $\lambda^*(E) \leq \alpha$ por lo que si $\lambda^*(E) = \infty$ entonces también $\alpha = \infty$. En otro caso, dado $\varepsilon > 0$ tomemos una sucesión (I_n) de intervalos abiertos acotados cuya unión contenga a E, y tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon.$$

Entonces $G = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ es un abierto que contiene a E, con lo que usando la definición de medida exterior de Lebesgue, tenemos

$$\alpha \leq \lambda(G) = \lambda^*(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon.$$

Siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, se sigue que $\alpha \leq \lambda^*(E)$.

i$\Rightarrow$ ii. En la demostración del teorema anterior se ha probado ya que $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$, donde

$$\mathcal{C} = \{E \subset \mathbb{R}^N : \ \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E), \ \forall A \subset \mathbb{R}^N\}.$$

ii$\Rightarrow$ iii. Fijemos $\varepsilon > 0$. Si $\lambda^*(E) < \infty$, tomemos un abierto G con $E \subset G$ y $\lambda(G) < \lambda^*(E) + \varepsilon$. Por ii

$$\lambda(G) = \lambda^*(G \cap E) + \lambda^*(G \setminus E) = \lambda^*(E) + \lambda^*(G \setminus E).$$

En consecuencia
$$\lambda^*(G\setminus E)<\varepsilon.$$
En el caso en que $\lambda^*(E)=\infty$, definamos $E_n=E\cap]-n,n[\times\cdots]-n,n[$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Como para cada natural n se verifican $E_n\in\mathcal{C}$ y $\lambda^*(E_n)\leq\lambda(]-n,n[\times\cdots\times]-n,n[)=(2n)^N<\infty$, por lo ya demostrado, existe un abierto G_n conteniendo a E_n y tal que
$$\lambda^*(G_n\setminus E_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$
Pongamos $G=\cup_{n=1}^{\infty}G_n$. G es abierto, y como $E=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$, G cubre a E. Además como $G\setminus E\subset\cup_{n=1}^{\infty}(G_n\setminus E_n)$ se tiene
$$\lambda^*(G\setminus E)\leq\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\setminus E_n)\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^*(G_n\setminus E_n)<\varepsilon$$
donde se ha empleado la monotonía y la σ-subaditividad.

iii$\Rightarrow$ iv. Para cada natural n sea $G_n\subset\mathbb{R}^N$ un abierto tal que $E\subset G_n$ y $\lambda^*(G_n\setminus E)<\frac{1}{n}$. Definiendo $A=\cap_{n=1}^{\infty}G_n$ se obtiene un conjunto de tipo G_δ con $E\subset A$ y, puesto que $A\setminus E\subset G_n\setminus E$, $\forall n\in\mathbb{N}$, se tiene
$$\lambda^*(A\setminus E)\leq\lambda^*(G_n\setminus E)<\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N},$$
y por tanto $\lambda^*(A\setminus E)=0$.

iv$\Rightarrow$ i. La hipótesis nos dice que $A,A\setminus E\in\mathcal{M}$ (A es boreliano y $\lambda^*(A\setminus E)=0$ por lo que ambos pertenecen a $\mathcal{M}$), luego $E=A\setminus(A\setminus E)\in\mathcal{M}$.

Hemos probado que $i\Leftrightarrow ii\Leftrightarrow iii\Leftrightarrow iv$. Para comprobar que también $i\Leftrightarrow v\Leftrightarrow vi$ basta tener en cuenta que
$$E\in\mathcal{M}\Leftrightarrow E^c\in\mathcal{M}$$
y que v (resp. vi) son las escrituras de iii (resp. iv) para el conjunto E^c.

Probemos finalmente la regularidad interior. Sea E medible y notemos
$$\alpha=\sup\{\lambda(K):\ K\subset\mathbb{R}^N \text{ compacto}, K\subset E\}.$$
Es claro que $\alpha\leq\lambda(E)$. Para probar la otra desigualdad consideremos para cada natural n el conjunto $E_n=E\cap]-n,n[\times\cdots\times]-n,n[$. Puesto que (E_n) es una sucesión creciente de conjuntos medibles con unión E, por el crecimiento continuo
$$\lambda(E)=\lim_{n\to\infty}\lambda(E_n).$$
Por v, para cada natural n existe $F_n\subset\mathbb{R}^N$ compacto contenido en E_n tal que
$$\lambda(E_n\setminus F_n)<\frac{1}{n}.$$

En consecuencia, (F_n) es una sucesión de compactos contenidos en E tales que

$$\lambda(E_n) = \lambda(F_n) + \lambda(E_n \setminus F_n), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

y por tanto, tomando limite obtenemos

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n).$$

Hemos probado que $\lambda(E) \leq \alpha$. $\square$

A continuación estudiamos el magnífico comportamiento de la medida de Lebesgue frente a las transformaciones afines. Empezamos probando que *si* $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *es una aplicación continua, entonces* $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}, \forall B \in \mathcal{B}$. En efecto, la familia

$$\{B \in \mathcal{B} : \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}\}$$

es una σ-álgebra que contiene los abiertos, luego coincide con la σ-álgebra de Borel y por tanto

$$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}, \forall B \in \mathcal{B}.$$

En particular *los homeomorfismos de* $\mathbb{R}^N$ *sobre* $\mathbb{R}^N$ *conservan los borelianos*. Conviene llamar la atención sobre el hecho de que, a diferencia de lo que ocurre con los borelianos, la imagen inversa por una función continua de un medible puede no serlo. De hecho *existen homeomorfismos de* $\mathbb{R}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *que no conservan los conjuntos medibles*. Sin embargo si es cierto que *el trasladado de un medible es medible*. En efecto, como las traslaciones conservan los conjuntos borelianos, basta probar que si $a \in \mathbb{R}^N$ y $Z \subset \mathbb{R}^N$ con $\lambda(Z) = 0$, entonces $\lambda(a+Z) = 0$, lo cual se deduce de que $v(I) = v(a+I)$ para todo intervalo acotado I de $\mathbb{R}^N$.

1.2.11 Teorema (Invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue)**.**

i. Si μ es una medida sobre $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{B}$) invariante por traslaciones y tal que $\alpha := \mu([0,1[^N) < \infty$, entonces $\mu = \alpha\lambda$.

ii. La medida de Lebesgue es la única medida sobre $\mathcal{M}$ invariante por traslaciones para la que la medida del intervalo $[0,1[^N$ es 1.

Demostración. i. Notemos $Q_0 = [0,1[^N$ y $Q_n = \frac{1}{2^n} Q_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Para cada natural n, Q_0 es unión de 2^n intervalos trasladados de Q_n dos a dos disjuntos, por lo que

$$\mu(Q_n) = \frac{\mu(Q_0)}{2^{nN}} = \frac{\alpha}{2^{nN}} = \alpha\, v(Q_n).$$

Al ser μ invariante por traslaciones deducimos que

$$\mu(Q) = \alpha\, v(Q), \ \text{para cualquier cubo diádico.}$$

La descomposición de un abierto en unión de diádicos disjuntos (véase el Apéndice 1.4.4) nos asegura que

$$\mu(G) = \alpha\lambda(G) \text{ para cualquier conjunto abierto G.}$$

Sea ahora K un compacto y tomemos I intervalo abierto acotado conteniendo a K. Entonces como $\mu(I) < \infty$, tenemos

$$\mu(K) = \mu(I) - \mu(I \setminus K) = \alpha\lambda(I) - \alpha\lambda(I \setminus K) = \alpha[\lambda(I) - \lambda(I \setminus K)] = \alpha\lambda(K).$$

Para $E \in \mathcal{M}$, en virtud de las regularidades de la medida de Lebesgue y de la monotonía de μ, se tiene que

$$\begin{aligned}
\alpha\lambda(E) &= \alpha \sup\{\lambda(K) : \ K \subset E \text{ compacto}\} \\
&= \sup\{\alpha\lambda(K) : \ K \subset E \text{ compacto}\} \\
&= \sup\{\mu(K) : \ K \subset E \text{ compacto}\} \\
&\leq \mu(E)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\alpha\lambda(E) &= \alpha \operatorname{ínf}\{\lambda(G) : \ E \subset G \text{ abierto}\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\alpha\lambda(G) : \ E \subset G \text{ abierto}\} \\
&= \operatorname{ínf}\{\mu(G) : \ E \subset G \text{ abierto}\} \\
&\geq \mu(E).
\end{aligned}$$

ii. Veamos que λ es invariante por traslaciones. Para cada $a \in \mathbb{R}^N$, definimos $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ por

$$\mu(E) = \lambda(a + E), \ \forall E \in \mathcal{M}$$

y basta probar, en virtud del teorema de existencia y unicidad de la medida de Lebesgue, que μ es una medida sobre $\mathcal{M}$ que extiende el volumen de los intervalos. Sea (E_n) una sucesión de conjuntos medibles disjuntos. Se tiene que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lambda\left(a + \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a + E_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a + E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

donde se utilizado que los conjuntos $a + E_n$ son disjuntos dos a dos. Finalmente

$$\mu(I) = \lambda(a + I) = v(a + I) = v(I),$$

para todo intervalo acotado I de $\mathbb{R}^N$. La unicidad es consecuencia inmediata de i. $\square$

1.2.12 Teorema. *Sea $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una aplicación lineal. Para todo conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^N$ se verifica que el conjunto $T(E)$ es medible y*

$$\lambda(T(E)) = |\det T|\lambda(E),$$

donde notamos $\det T$ *al determinante de la matriz asociada a T. En particular si T es una isometría euclídea, entonces*

$$\lambda(T(E)) = \lambda(E),\ \forall E \in \mathcal{M}.$$

Demostración. Supongamos que $\det T \neq 0$. Entonces T es un isomorfismo y por lo tanto aplica borelianos en borelianos. Esto nos permite definir $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ por

$$\mu(B) = \lambda(T(B)),\ \forall B \in \mathcal{B}$$

que es claramente una medida invariante por traslaciones y tal que $\mu([0,1[^N) < \infty$ (por ser $T([0,1[^N)$ acotado). Así, en virtud del teorema 1.2.11.i, se sigue que existe $\alpha_T \geq 0$ tal que

$$\mu(B) = \alpha_T\lambda(B),\ \forall B \in \mathcal{B},$$

y por tanto

$$\lambda(T(B)) = \alpha_T\lambda(B),\ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Si ahora Z es de medida cero, entonces, en virtud de la regularidad de la medida exterior de Lebesgue (Proposición 1.2.7), existe B boreliano con $Z \subset B$ tal que $\lambda(B) = 0$. Se tiene pues que

$$T(Z) \subset T(B) \Rightarrow \lambda(T(Z)) \leq \lambda(T(B)) = \alpha_T\lambda(B) = 0 \Rightarrow \lambda(T(Z)) = 0.$$

En consecuencia,

$$\lambda(T(E)) = \alpha_T\lambda(E),\ \forall E \in \mathcal{M}.$$

Seguidamente probamos que $\alpha_T = 1$ en el caso particular de que T sea una isometría. En efecto, tomando como E la bola unidad euclídea B, al ser $T(B) = B$, obtenemos

$$\lambda(B) = \lambda(T(B)) = \alpha_T\lambda(B).$$

Si T es una isometría, sabemos que la matriz asociada tiene determinante ± 1, ya que la matriz asociada es ortogonal.

En el caso general en que T sea una aplicación lineal con $\det T \neq 0$, es sabido (véase Apéndice 1.4.3) que existen isometrías lineales Q_1 y Q_2 y una aplicación lineal D, tal que $D(e_i) = \alpha_i e_i\ \ (1 \leq i \leq N)$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ son reales positivos, tales que

$$T = Q_1 D Q_2,$$

y en consecuencia $\det D = |\det T| \neq 0$.

Es inmediato comprobar que

$$\lambda(D([0,1]^N)) = \lambda([0,\alpha_1] \times \ldots \times [0,\alpha_N]) = \prod_{j=1}^{N} \alpha_j = \det D,$$

luego $\alpha_D = \det D$, como pretendíamos demostrar.

Sabemos entonces que

$$\lambda(D(E)) = \det D\, \lambda(E) = |\det T|\lambda(E), \quad \forall E \in \mathcal{M}.$$

Por el resultado ya probado para isometrías, sabemos que

$$\lambda(T(E)) = \lambda((Q_1 D Q_2)(E)) = \lambda((D Q_2)(E)) = |\det T|\, \lambda(Q_2(E)) = |\det T|\, \lambda(E),$$

para todo $E \in \mathcal{M}$.

Supongamos finalmente que $\det T = 0$. En esta situación $T(\mathbb{R}^N)$ está incluido en un hiperplano de $\mathbb{R}^N$ y por tanto existe una isometría lineal Q verificando que $Q(T(\mathbb{R}^N)) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{N-1}$. En consecuencia, por lo ya demostrado,

$$\lambda(T(\mathbb{R}^N)) = \lambda(Q(T(\mathbb{R}^N))) \leq \lambda(\{0\} \times \mathbb{R}^{N-1}) = 0$$

y de ello deducimos que

$$\lambda(T(E)) = 0,\ \forall E \in \mathcal{M}.$$

$\square$

Finalizamos el tema estudiando el comportamiento de la medida de Lebesgue frente a las aplicaciones de clase C^1.

1.2.13 Lema. *Sean $G \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $f : G \to \mathbb{R}^N$ y $K \geq 0$ tales que*

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq K\|x - y\|_\infty,\ \forall x, y \in G.$$

Entonces $\lambda^*(f(E)) \leq K^N \lambda^*(E)$, $\forall E \subset G$.

Demostración. Si $\lambda^*(E) = \infty$ no hay nada que probar. En otro caso, fijado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión (I_n) de cubos diádicos disjuntos dos a dos cuyo cierre está contenido en G y tales que

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} v(I_n) \leq \lambda^*(E) + \varepsilon.$$

En efecto: como consecuencia de la regularidad de la medida exterior de Lebesgue (Proposición 1.2.7) y de la regularidad exterior de la medida de Lebesgue (Teorema

1.2.10) existe un abierto G' tal que $E \subset G'$ y $\lambda(G') \leq \lambda^*(E) + \varepsilon$. Entonces como sucesión (I_n) se puede tomar la partición canónica de $G \cap G'$ en cubos diádicos (Apéndice 1.4.4). Para cada natural n escribamos $\overline{I_n} = \overline{B}_\infty(a_n, r_n)$. Se tiene entonces que

$$f(I_n) \subset \overline{B}_\infty(f(a_n), Kr_n),$$

y en consecuencia

$$\lambda^*(f(E)) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty f(I_n)\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \lambda^*(f(I_n)) \leq$$
$$\sum_{n=1}^\infty \lambda\left(\overline{B}_\infty(f(a_n), Kr_n)\right) = \sum_{n=1}^\infty K^N \lambda\left(\overline{B}_\infty(f(a_n), r_n)\right) =$$
$$\sum_{n=1}^\infty K^N \lambda\left(\overline{B}_\infty(a_n, r_n)\right) = K^N \sum_{n=1}^\infty v(I_n) \leq K^N \left(\lambda^*(E) + \varepsilon\right).$$

Por último de la arbitrariedad de ε se deduce que

$$\lambda^*(f(E)) \leq K^N \lambda^*(E).$$

$\square$

1.2.14 Proposición. *Sean $G \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $f : G \to \mathbb{R}^N$ una función de clase C^1. Se verifican las siguientes propiedades:*

i. $f(Z)$ es de medida cero para todo $Z \subset G$ de medida cero.

ii. $f(E)$ es medible para todo $E \subset G$ medible.

Demostración. i. Para cada natural n sea $G_n = \{x \in G : \|Df(x)\|_\infty < n\}$. Es claro que G_n es abierto y que basta probar que

$$\lambda(f(Z \cap G_n)) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es sabido que G_n se puede expresar como una unión numerable de bolas abiertas (no necesariamente disjuntas entre sí). En efecto, para cada $x \in G_n$ existen $b_x \in G_n \cap \mathbb{Q}^N$ y $r_x \in \mathbb{Q}^+$ tales que

$$x \in B_\infty(b_x, r_x) \subset G_n.$$

Es claro que

$$G_n = \bigcup_{x \in G_n} B_\infty(b_x, r_x)$$

y que la familia $\{B_\infty(b_x, r_x) : x \in G_n\}$ es numerable (¡Obsérvese que estas bolas se repiten muchas veces!). Pongamos

$$\{B_\infty(b_x, r_x) : x \in G_n\} = \{B_\infty(b_k, r_k) : k \in \mathbb{N}\}.$$

El teorema del valor medio nos asegura que para cada k natural la función f verifica

$$\|f(x)-f(y)\|_\infty \le n\|x-y\|_\infty, \forall x,y \in B_\infty(b_k,r_k),$$

y del lema anterior se deduce que

$$\lambda^*(f(Z\cap G_n)) \le \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(f(Z\cap B_\infty(b_k,r_k)) \le n^N \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(Z\cap B_\infty(b_k,r_k)) = 0.$$

ii. Sea $E \subset G$ medible. El apartado $v)$ del Teorema 1.2.10 nos proporciona una sucesión (F_n) de cerrados contenidos en E tal que $\lambda\left(E\setminus \cup_{n=1}^\infty F_n\right) = 0$. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el compacto

$$K_n = (F_1 \cup \ldots \cup F_n) \cap \overline{B}(0,n).$$

Se tiene entonces que $K_n \subset E$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y que $\lambda\left(E\setminus \cup_{n=1}^\infty K_n\right) = 0$. Como

$$f(E) = f\left(\bigcup_{n=1}^\infty K_n \cup (E\setminus \cup_{n=1}^\infty K_n)\right) = \cup_{n=1}^\infty f(K_n) \cup f\left(E\setminus \cup_{n=1}^\infty K_n\right),$$

concluimos que $f(E)$ es medible pues la continuidad conserva la compacidad y el apartado $i)$ nos asegura que $f\left(E\setminus \cup_{n=1}^\infty K_n\right)$ es medible (de hecho es de medida cero). $\square$

Observación 1.2.15. Adelantando bastante los acontecimientos nos tomaremos la libertad de avanzar que si en el resultado anterior la función f es inyectiva y $\det Jf(x) \neq 0$ para todo $x \in G$, entonces se verifica

$$\lambda\Big(f(E)\Big) = \int_E |\det Jf(x)|\,dx$$

para todo $E \subset G$ medible. En el caso particular $N = 1$ basta con exigir la condición $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in G$, en cuyo caso $f'(x) > 0$ para todo $x \in G$, o bien $f'(x) < 0$ para todo $x \in G$, y en el primer caso se verifica

$$\lambda\Big(f(E)\Big) = \int_E f'(x)dx.$$

1.3. Medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^N$

Las medidas más importantes en $\mathbb{R}^N$ son indudablemente aquellas que están definidas en la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$ y que son finitas sobre los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^N$. Estas medidas se suelen conocer con el nombre de medidas de Lebesgue-Stieltjes y resultan estar asociadas a un tipo particular de funciones conocidas como funciones de distribución. La teoría se desarrolla esencialmente de igual manera en cualquier dimensión. Expondremos seguidamente esta teoría en $\mathbb{R}$ y esbozaremos posteriormente el desarrollo de la misma en $\mathbb{R}^N$.

1.3.1. Medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$

1.3.1 Definición (Medidas de Borel-Stieltjes)**.** Una *medida de Borel-Stieltjes* en $\mathbb{R}$ es una medida μ definida sobre la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ tal que $\mu(I) < \infty$ para todo intervalo acotado I de $\mathbb{R}$. La completación de una tal medida recibe el nombre de *medida de Lebesgue-Stieltjes* en $\mathbb{R}$.

1.3.2 Proposición (Función de distribución asociada a una medida de Borel -Stieltjes)**.** *Sea μ una media de Borel-Stieltjes en $\mathbb{R}$. Entonces la función $F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F_\mu(x) = \begin{cases} \mu(]0,x]) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -\mu(]x,0]) & si \quad x < 0 \end{cases}$$

verifica las siguientes propiedades:

i. F_μ es creciente;

ii. $\lim_{x\to a,\ x>a} F_\mu(x) = F_\mu(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. i. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Si $x < 0$ y $0 \leq y$, entonces $F_\mu(x) \leq 0 \leq F_\mu(y)$. Supongamos ahora que $0 \leq x < y$. Entonces $]0,x] \subset]0,y]$ y en consecuencia

$$F_\mu(x) = \mu(]0,x]) \leq \mu(]0,y]) = F_\mu(y).$$

Si $x < y \leq 0$, entonces $]x,0] \subset]y,0]$ y por tanto $\mu(]y,0]) \leq \mu(]x,0])$, que nos permite concluir

$$F_\mu(x) = -\mu(]x,0]) \leq -\mu(]y,0]) = F_\mu(y).$$

ii. Sea $a > 0$ y sea (x_n) una sucesión decreciente con $\lim x_n = a$. Como $]0,a] = \cap_{n=1}^\infty]0,x_n]$ tenemos que

$$F_\mu(a) = \mu(]0,a]) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]0,x_n]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(]0,x_n]) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(x_n) = \lim_{x\to a, x>a} F_\mu(x).$$

Análogamente se verificaría la propiedad ii para $a \leq 0$. $\square$

Las propiedades aparecidas en el anterior resultado dan origen al concepto de función de distribución en $\mathbb{R}$ que precisamos a continuación.

1.3.3 Definición (Función de distribución en $\mathbb{R}$)**.** Una *función de distribución* en $\mathbb{R}$ es una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

i. F es creciente.

ii. $\displaystyle\lim_{x\to a,\ x>a} F(x) = F(a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Observación 1.3.4 (Función de distribución asociada a una probabilidad)**.** Si $\mathbb{P}$ es una probabilidad definida en $\mathcal{B}$, entonces se satisface la condición exigida en la proposición anterior y en esta situación la función de distribución de $\mathbb{P}$ se acostumbra a definir de la siguiente manera (más simple que la dada en la proposición)

$$F_{\mathbb{P}}(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x])$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Obsérvese que ahora la función de distribución satisface la siguiente propiedad adicional:

iii. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F_{\mathbb{P}}(x) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_{\mathbb{P}}(x) = 1$.

Comprobaremos ahora que a partir de cualquier función de distribución F en $\mathbb{R}$ podemos construir una medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$ cuya función de distribución asociada es F. El propósito es construir una medida λ_F sobre la σ-álgebra de Borel de tal manera que $\lambda_F(]a,b]) = F(b) - F(a)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. El germen para esta construcción es la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes que se define seguidamente.

1.3.5 Definición (de la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes asociada a una función de distribución)**.** Sea F una función de distribución en $\mathbb{R}$. La *medida exterior de Lebesgue-Stieltjes* asociada a F, λ_F^*, en $\mathbb{R}$ es por definición la aplicación

$$\lambda_F^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$$

dada por

$$\lambda_F^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(F(b_n) - F(a_n)) :\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n],\ a_n, b_n \in \mathbb{R},\ a_n < b_n\right\}$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$.

1.3.6 Definición (de la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a una función de distribución)**.** Sea F una función de distribución en $\mathbb{R}$. La *medida de Lebesgue-Stieltjes* con función de distribución F, λ_F, en $\mathbb{R}$ es la restricción de la medida exterior de Lebesgue a la σ-álgebra $\mathcal{M}_F$ definida por

$$\mathcal{M}_F = \{B \cup Z :\ B \in \mathcal{B},\ Z \subset \mathbb{R}^N \text{ con } \lambda_F^*(Z) = 0\}.$$

Como sucedió con la σ-álgebra de Lebesgue y la medida de Lebesgue, hemos de justificar que el conjunto $\mathcal{M}_F$ considerado es efectivamente una σ-álgebra y por supuesto debemos justificar el calificativo de medida que hemos atribuido a la restricción de la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes a $\mathcal{M}_F$. Esta será la principal labor que llevaremos a cabo en este tema.

Puesto que todo intervalo acotado de $\mathbb{R}$ está contenido en un intervalo acotado que además es abierto y cuya longitud está tan próxima a la longitud del intervalo original como se quiera se puede establecer la siguiente identidad.

1.3.7 Proposición.

$$\lambda_F^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(F(b_n) - F(a_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[,\ a_n, b_n \in \mathbb{R},\ a_n < b_n\right\}$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Es idéntica a la demostración de la Proposición 1.2.4. □

1.3.8 Teorema (de existencia y unicidad de la medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$)**.** *Sea F una función de distribución en $\mathbb{R}$. Se verifican entonces las siguientes afirmaciones.*

i. La familia de subconjuntos $\mathcal{M}_F$ de $\mathbb{R}$ definida como sigue

$$\mathcal{M}_F = \{B \cup Z :\ B \in \mathcal{B},\ Z \subset \mathbb{R}^N \text{ con } \lambda_F^*(Z) = 0\}$$

es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$ que contiene a los intervalos acotados.

ii. La restricción a $\mathcal{M}_F$ (resp. $\mathcal{B}$) de la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes es la única medida sobre $\mathcal{M}_F$ (resp. $\mathcal{B}$) tal que

$$\lambda_F(]a,b]) = F(b) - F(a)$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Demostración. Es enteramente similar a la demostración del Teorema 1.2.9 de existencia y unicidad de la medida de Lebesgue. □

Observación 1.3.9.

i. Conviene observar que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es justamente la medida correspondiente a la función de distribución $F(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii. Es inmediato que si dos funciones de distribución difieren en una constante, entonces las correspondientes medidas de Lebesgue-Stieltjes asociadas son idénticas.

1.3.10 Teorema. *Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución. Supongamos que F es continua en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$. Entonces*

$$\lambda_F^*(E) = \lambda^*(F(E))$$

para todo subconjunto $E \subset I$.

Demostración. Sea $E \subset I$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe una sucesión de intervalos $(]a_n, b_n])$ de manera que

$$]a_n, b_n] \subset I, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n]$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(a_n) \leq \lambda_F^*(E) + \varepsilon.$$

Sea $J_n = F(]a_n, b_n])$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Puesto que F es continua y creciente en I, J_n es un intervalo de extremos $F(a_n)$ y $F(b_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como

$$F(E) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

podemos concluir que

$$\lambda^*(F(E)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)] \leq \lambda_F^*(E) + \varepsilon.$$

Puesto que ε es arbitrario, obtenemos que

$$\lambda^*(F(E)) \leq \lambda_F^*(E).$$

Para probar la desigualdad contraria, fijemos nuevamente $\varepsilon > 0$ y tomemos ahora una sucesión de intervalos abiertos (J_n) de manera que

$$F(E) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leq \lambda^*(F(E)) + \varepsilon.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n = \{x \in I : \ F(x) \in J_n\}$. Puesto que F es continua en I podemos asegurar que I_n es abierto. Además, el crecimiento de F garantiza que cada I_n es un intervalo $]a_n, b_n[$. Por otra parte es claro que $E \subset \cup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$. En consecuencia, tenemos que

$$\lambda_F^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} [F(b_n) - F(a_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leq \lambda^*(F(E)) + \varepsilon.$$

Finalmente haciendo $\varepsilon \to 0$ obtenemos la desigualdad deseada $\lambda_F^*(E) \leq \lambda^*(F(E))$. $\square$

Observación 1.3.11.

i. Si unimos la información proporcionada por el anterior resultado a la información avanzada en la Oservación 1.2.15 del tema anterior obtenemos que en el caso de que la función de distribución F sea de clase C^1 en un intervalo I, entonces la medida de Lebesgue-Stieltjes se puede calcular en el interior de dicho intervalo mediante la siguiente identidad

$$\lambda_F(E) = \int_E F'(x)dx$$

para todo subconjunto $E \subset I$ medible. De hecho, esta expresión de la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a la función de distribución F es válida siempre que F sea absolutamente continua en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en el intervalo considerado I (lo cual es cierto en el caso particular de que F sea derivable en dicho intervalo y su derivada sea localmente integrable en I, esto es integrable en todo intervalo cerrado y acotado contenido en I). La justificación de las anteriores afirmaciones está todavía muy lejos de nuestro alcance y su demostración exige avanzar muchísimo más en la teoría.

ii. Es totalmente elemental verificar a partir de la definición (aunque también se desprendería del comentario anterior) que la medida de Lebesgue-Stieltjes es idénticamente cero para cualquier subconjunto contenido en un intervalo abierto en el que F sea constante.

1.3.12 Proposición. *Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución. Entonces*

$$\mu(\{a\}) = F(a) - \lim_{x \to a, x < a} F(x)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea (x_n) una sucesión creciente en $\mathbb{R}$ con $\lim x_n = a$. Entonces $\{a\} = \cap_{n=1}^{\infty}]x_n, a]$ y en consecuencia

$$\mu_F(\{a\}) = \mu_F\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]x_n, a]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_F(]x_n, a]) = \lim_{n\to\infty} [F(a) - F(x_n)] =$$

$$F(a) - \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(a) - \lim_{x \to a, x < a} F(x).$$

$\square$

1.3.2. Ejemplos

i. Consideremos la función de *Heaviside* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que está definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x. \end{cases}$$

- Discontinuidades: el 0 con salto 1. En consecuencia $\lambda_F(\{0\}) = 1$.
- Intervalos en los que F es constante: $]-\infty,0[$ y $]0,+\infty[$. En consecuencia $\lambda_F(]-\infty,0[) = \lambda_F(]0,+\infty[) = 0$.
- Si $E \in \mathcal{B}$, entonces

$$\lambda_F(E) = \lambda_F(E\cap]-\infty,0[) + \lambda_F(E\cap\{0\}) + \lambda_F(E\cap]0,+\infty[) =$$
$$\lambda_F(E\cap\{0\}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \notin E, \\ 1 & \text{si} \quad 0 \in E. \end{cases}$$

ii. . Consideremos $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = E(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Discontinuidades: $\mathbb{Z}$ con salto 1 en cada uno de los puntos. En consecuencia $\lambda_F(\{k\}) = 1$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- Intervalos de constancia: $]k,k+1[$ para $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto $\lambda_F(]k,k+1[) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.
- Sea $E \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\lambda_F(E) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_F(E\cap\{k\}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_F(E\cap]k,k+1[) =$$
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_F(E\cap\{k\}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \notin E, \\ 1 & \text{si} \quad k \in E \end{cases} = card(E\cap\mathbb{Z}).$$

iii. Consideremos $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ x & \text{si} \quad 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{si} \quad 1 \le x. \end{cases}$$

- Discontinuidades: ninguna.
- Intervalos de constancia: $]-\infty,0[$ y $]1,+\infty[$. Por tanto $\lambda_F(]-\infty,0[) = 0$ y $\lambda_F(]1,+\infty[) = 0$.
- Intervalos de derivabilidad (no trivial): $]0,1[$ con $F'(x) = 1$.
- Obsérvese que han quedado los puntos 0 y 1 cuya medida es cero por continuidad de F.
- Sea $E \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\lambda_F(E) = \lambda_F(E\cap]-\infty,0[) + \lambda_F(E\cap\{0\}) + \lambda_F(E\cap]0,1[) + \lambda_F(E\cap\{1\})$$
$$+ \lambda_F(E\cap]1,+\infty[) = \lambda_F(E\cap]0,1[) = \int_{E\cap]0,1[} 1dx = \lambda(E\cap]0,1[).$$

iv. Consideremos $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

- Discontinuidades: ninguna.
- Intervalos de constancia: $]-\infty, 0[$ y $]1, +\infty[$. Por tanto $\lambda_F(]-\infty, 0[) = 0$ y $\lambda_F(]1, +\infty[) = 0$.
- Intervalos de derivabilidad (no trivial): $]0, 1[$ con $F'(x) = 2$.
- Obsérvese que han quedado los puntos 0 y 1 cuya medida es cero por continuidad de F.
- Sea $E \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\lambda_F(E) = \lambda_F(E \cap]-\infty, 0[) + \lambda_F(E \cap \{0\}) + \lambda_F(E \cap]0, 1[) + \lambda_F(E \cap \{1\}) \\ + \lambda_F(E \cap]1, +\infty[) = \lambda_F(E \cap]0, 1[) = \int_{E \cap]0,1[} 2dx = 2\lambda(E \cap]0, 1[).$$

v. Consideremos $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 5 & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

- Discontinuidades: el punto 1 con salto 3.
- Intervalos de constancia: $]-\infty, 0[$ y $]1, +\infty[$. Por tanto $\lambda_F(]-\infty, 0[) = 0$ y $\lambda_F(]1, +\infty[) = 0$.
- Intervalos de derivabilidad (no trivial): $]0, 1[$ con $F'(x) = 2$.
- Obsérvese que ha quedado el punto 0 cuya medida es cero por continuidad de F.
- Sea $E \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\lambda_F(E) = \lambda_F(E \cap]-\infty, 0[) + \lambda_F(E \cap \{0\}) + \lambda_F(E \cap]0, 1[) + \lambda_F(E \cap \{1\}) \\ + \lambda_F(E \cap]1, +\infty[) = \lambda_F(E \cap]0, 1[) + \lambda_F(E \cap \{1\}) = \\ \int_{E \cap]0,1[} 2dx + \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \notin E, \\ 3 & \text{si} \quad 1 \in E. \end{cases}$$

vi. Consideremos $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ x + 2 & \text{si} \quad 2 \leq x. \end{cases}$$

- Discontinuidades: los puntos de $\{k \in \mathbb{Z} : \ k \leq 0\}$ con salto 1 y el punto 2 con salto 2.
- Intervalos de constancia: todos los de la forma $]k-1,k[$ para $k \in \mathbb{Z}$ y $k \leq 0$. Por tanto $\lambda_F(]k-1,k[) = 0$ para $k \leq 0$.
- Intervalos de derivabilidad (no trivial): $]0,1[$ con $F'(x) = 2x$, $]1,2[$ con $F'(x) = 1$ y $]2,+\infty[$ con $F'(x) = 1$.
- Obsérvese que ha quedado el punto 1 cuya medida es cero por continuidad de F.
- Sea $E \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\lambda_F(E) = \sum_{k=-\infty}^{0} \lambda_F(E \cap]k-1,k[) + \sum_{k=-\infty}^{0} \lambda_F(E \cap \{k\}) + \lambda_F(E \cap]0,1[) +$$
$$\lambda_F(E \cap \{1\}) + \lambda_F(E \cap]1,2[) + \lambda_F(E \cap \{2\}) + \lambda_F(E \cap]2,+\infty[) =$$
$$\sum_{k=-\infty}^{0} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \notin E, \\ 1 & \text{si} \quad k \in E \end{cases} + \int_{E \cap]0,1[} 2dx +$$
$$\int_{E \cap]1,2[} 1dx + \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 2 \notin E, \\ 2 & \text{si} \quad 2 \in E. \end{cases} + \int_{E \cap]2,+\infty[} 1dx$$

1.3.3. Medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^N$

1.3.13 Definición (Medidas de Borel-Stieltjes en $\mathbb{R}^N$)**.** Una *medida de Borel-Stieltjes* en $\mathbb{R}^N$ es una medida μ definida sobre la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^N$ tal que $\mu(I) < \infty$ para todo intervalo acotado I de $\mathbb{R}^N$. La completación de una tal medida recibe el nombre de *medida de Lebesgue-Stieltjes* en $\mathbb{R}^N$.

También las medidas de Borel-Stieltjes en $\mathbb{R}^N$ tienen asociada una función de distribución cuya definición precisamos inmediatamente.

1.3.14 Definición (Función de distribución en $\mathbb{R}^N$)**.** Una *función de distribución* en $\mathbb{R}^N$ es una función $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

i. Si $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$ son tales que $a_1 < b_1, \ldots, a_N < b_N$, entonces

$$\Delta^1_{a_1,b_1} \cdots \Delta^N_{a_N,b_N} F \geq 0,$$

donde $\Delta^k a_k, b_k$ está definido como sigue

$$\Delta^k_{a_k,b_k} F = F(\cdots, b_k, \cdots) - F(\cdots, a_k, \cdots)$$

para $k = 1, \ldots, N$.

ii.
$$\lim_{(x_1,\ldots,x_N)\to(a_1,\ldots,a_N),\ x_1>a_1,\ldots,x_N>a_N} F(x_1,\ldots,x_N) = F(a_1,\ldots,a_N)$$
para todo $(a_1,\ldots,a_N)\in\mathbb{R}^N$.

La manera en que se realiza esta asociación es igual de simple que en dimensión uno pero bastante más engorrosa de escribir. Por este motivo nos abstendremos de ello y simplemente informaremos a continuación la manera en la que esta asignación se lleva a cabo en el caso de tratar con una probabilidad en $\mathbb{R}^N$.

Observación 1.3.15 (Función de distribución asociada a una probabilidad)**.** Si $\mathbb{P}$ es una probabilidad definida en $\mathcal{B}$, entonces su función de distribución $F_{\mathbb{P}}$ puede obtenerse mediante la expresión

$$F_{\mathbb{P}}(x_1,\ldots,x_N) = \mathbb{P}(]-\infty,x_1]\times\cdots\times]-\infty,x_N])$$

para todo $(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{R}^N$.

Comprobaremos ahora que a partir de cualquier función de distribución F en $\mathbb{R}^N$ podemos construir una medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^N$ cuya función de distribución asociada es F. El propósito es construir una medida λ_F sobre la σ-álgebra de Borel de tal manera que

$$\lambda_F(]a_1,b_1]\times\cdots]a_N,b_N]) = \Delta^1_{a_1,b_1}\cdots\Delta^N a_N,b_N F$$

para cualesquiera $a_1,\ldots,a_N,b_1,\ldots,b_N\in\mathbb{R}$ con $a_1<b_1,\ldots,a_N<b_N$. Para abreviar, en lo sucesivo, notaremos

$$v_F(]a_1,b_1]\times\cdots]a_N,b_N]) = \Delta^1_{a_1,b_1}\cdots\Delta^N_{a_N,b_N}F$$

para cualesquiera $a_1,\ldots,a_N,b_1,\ldots,b_N\in\mathbb{R}$ con $a_1<b_1,\ldots,a_N<b_N$ y notaremos $\mathfrak{I}$ a la familia de todos los intervalos de $\mathbb{R}^N$ de la forma $]a_1,b_1]\times\cdots\times]a_N,b_N]$. El germen para esta construcción es la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes que se define seguidamente.

1.3.16 Definición (de la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes asociada a una función de distribución)**.** Sea F una función de distribución en $\mathbb{R}^N$. La *medida exterior de Lebesgue-Stieltjes* asociada a F, λ_F^*, en $\mathbb{R}^N$ es por definición la aplicación

$$\lambda_F^*:\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)\to[0,\infty]$$

dada por

$$\lambda_F^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} v_F(I_n):\ A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n\in\mathfrak{I}\right\},$$

para todo $A\subset\mathbb{R}^N$.

1.3.17 Definición (de la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a una función de distribución)**.** Sea F una función de distribución en $\mathbb{R}^N$. La *medida de Lebesgue-Stieltjes* con función de distribución F, λ_F, en $\mathbb{R}^N$ es la restricción de la medida exterior de Lebesgue a la σ-álgebra $\mathcal{M}_F$ definida por

$$\mathcal{M}_F = \{B \cup Z : \ B \in \mathcal{B}, \ Z \subset \mathbb{R}^N \text{ con } \lambda_F^*(Z) = 0\}.$$

1.3.18 Teorema (de existencia y unicidad de la medida de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}^N$)**.** *Sea F una función de distribución en $\mathbb{R}^N$. Se verifican entonces las siguientes afirmaciones.*

i. La familia de subconjuntos $\mathcal{M}_F$ de $\mathbb{R}^N$ definida como sigue

$$\mathcal{M}_F = \{B \cup Z : \ B \in \mathcal{B}, \ Z \subset \mathbb{R}^N \ con \ \lambda_F^*(Z) = 0\}$$

es una σ-álgebra en $\mathbb{R}^N$ que contiene a los intervalos acotados.

ii. La restricción a $\mathcal{M}_F$ (resp. $\mathcal{B}$) de la medida exterior de Lebesgue-Stieltjes es la única medida sobre $\mathcal{M}_F$ (resp. $\mathcal{B}$) tal que

$$\lambda_F(I) = v_F(I)$$

para todo $I \in \mathfrak{I}$.

Observación 1.3.19.

i. Conviene observar que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es justamente la medida correspondiente a la función de distribución $F(x_1, \ldots, x_N) = x_1 \cdots x_N$ para todo $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

ii. Es inmediato que si dos funciones de distribución difieren en una constante, entonces las correspondientes medidas de Lebesgue-Stieltjes asociadas son idénticas.

1.4. Apéndices

1.4.1. Orden, topología y aritmética en $[0,\infty]$

El conjunto

$$[0,\infty] := \{x \in \mathbb{R} : \; 0 \le x\} \cup \{\infty\}$$

se considera como un conjunto totalmente ordenado, extendiendo el orden usual de $[0,+\infty[$ mediante el convenio

$$x \le \infty, \; \forall x \in [0,\infty].$$

Es inmediato que todo subconjunto de $[0,\infty]$ tiene supremo e ínfimo. En $[0,\infty]$ se considera la topología del orden, para la cual los conjuntos de la forma $[0,\alpha[$ y $]\beta,\infty]$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{Q}^+$, forman una subbase numerable. Dicha topología coincide con la topología de la compactación por un punto de $[0,+\infty[$. De esta forma $[0,\infty]$ se convierte en un espacio métrico compacto (homeomorfo al intervalo $[0,1]$). Es inmediato que toda sucesión monótona creciente de elementos de $[0,\infty]$ es convergente (al supremo del conjunto de sus términos).

Si extendemos la operación suma en $[0,\infty]$ mediante

$$x + \infty = \infty + x = \infty, \; \forall x \in [0,\infty]$$

tenemos claramente que la suma es asociativa y conmutativa y que 0 es el elemento neutro. Además la suma es compatible con el orden:

$$[x,y \in [0,\infty], x \le y] \Rightarrow x + z \le y + z, \; \forall z \in [0,\infty].$$

Si $\sum_{n\ge 1} a_n$ es una serie de elementos de $[0,\infty]$, entonces, al ser creciente la sucesión de sumas parciales, dicha serie es convergente (aunque su término general no tienda a cero).

Notemos que la suma es continua, es decir:

$$\left[a,b,a_n,b_n \in [0,\infty], \; \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{c} (a_n) \to a \\ (b_n) \to b \end{array} \right\}\right] \Rightarrow (a_n + b_n) \to a + b.$$

Como consecuencia se tiene, por ejemplo, que

$$[a_n, b_n \in [0,\infty], \; \forall n \in \mathbb{N}] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Más aún, si $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to [0,\infty]$ es una sucesión doble de $[0,\infty]$ y σ es una biyección de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

En efecto. Veamos, por ejemplo, la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Claramente para $N \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)},\ \forall M \in \mathbb{N},$$

luego

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} a_{m,n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)},$$

y por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

Recíprocamente, para $K \in \mathbb{N}$ fijo, existen $M,N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{k=1}^{K} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} a_{m,n},$$

luego

$$\sum_{k=1}^{K} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n},$$

y por tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}.$$

Aplicando lo ya demostrado a $b_{m,n} = a_{n,m}$ y a la biyección $\tau \circ \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, donde $\tau(m,n) = (n,m)$, se obtiene la otra igualdad.

La definición de producto es algo más problemática. Extendemos el producto usual en $[0,\infty[$ mediante el convenio:

$$x\infty = \infty x = \infty, \forall x \in]0,\infty],\quad 0\,\infty = \infty\, 0 = 0\ .$$

Es inmediato comprobar que este producto es asociativo, conmutativo y distributivo respecto de la suma, así como que 1 es el elemento neutro. El haber definido $0\,\infty = \infty\,0 = 0$ hace evidente que el producto no sea continuo. No obstante es claro que si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones crecientes de elementos de $[0,\infty]$, $\{a_n\} \to a$ y $\{b_n\} \to b$, entonces $\{a_n b_n\} \to ab$. En particular,

$$[a, a_n \in [0,\infty], \forall n \in \mathbb{N}] \Rightarrow a\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a a_n.$$

1.4.2. Subaditividad del volumen

Si un intervalo acotado está incluido en la unión de un número finito de intervalos acotados, esto es $I \subset I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$, entonces

$$v(I) \leq v(I_1) + \ldots + v(I_n).$$

i. Empezaremos probando que si un intervalo acotado I es unión finita de intervalos $I_1, \ldots, I_n$ disjuntos dos a dos, entonces

$$v(I) = v(I_1) + \ldots + v(I_n).$$

Fijemos $j \in \{1, \ldots, N\}$, sean S, T semirrectas disjuntas cuya unión sea $\mathbb{R}$ y pongamos

$$\begin{aligned} \hat{S} &:= \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in I : x_j \in S\}, \\ \hat{T} &:= \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in I : x_j \in T\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Se deduce directamente de la definición de volumen que

$$v(I) = v(\hat{S}) + v(\hat{T})$$

puesto que $\ell(\pi_j(I)) = \ell(\pi_j(I \cap \hat{S})) + \ell(\pi_j(I \cap \hat{T}))$, mientras que para $k \neq j$ es $\ell(\pi_k(I)) = \ell(\pi_k(I \cap \hat{S})) = \ell(\pi_k(I \cap \hat{T}))$.

Probaremos la proposición por inducción sobre el número de intervalos que intervienen en la descomposición. Acabamos de demostrar que el enunciado es cierto siempre que en la partición intervienen sólo dos intervalos. Sea $n > 2$ un natural tal que el enunciado es cierto para todos los números naturales precedentes. Sea I un intervalo acotado de $\mathbb{R}^N$ tal que $I = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ para intervalos disjuntos. Sean $I_1 = A_1 \times \ldots \times A_N$, $I_n = B_1 \times \ldots \times B_N$ las expresiones de I_1 e I_n como producto de intervalos acotados de $\mathbb{R}$, sea $j \in \{1, \ldots, d\}$ tal que $A_j \cap B_j = \emptyset$ (por ser $I_1 \cap I_n = \emptyset$ tal j existe), sean S y T semirrectas disjuntas de $\mathbb{R}$ tales que

$$A_j \subset S,\ B_j \subset T,\ S \cup T = \mathbb{R}$$

y definamos $\hat{S}$ y $\hat{T}$ como en (1.4). Por ser $I_1 \subset \hat{S}$, $I_n \subset \hat{T}$ tenemos:

$$\hat{S} = (\hat{S} \cap I_1) \cup \ldots \cup (\hat{S} \cap I_{n-1}), \hat{T} = (\hat{T} \cap I_2) \cup \ldots \cup (\hat{T} \cap I_n)$$

expresiones de $\hat{S}$ y $\hat{T}$ como uniones de $n-1$ intervalos acotados dos a dos disjuntos. Aplicando la hipótesis de inducción y que $v(\emptyset) = 0$, tenemos:

$$v(I) = v(\hat{S}) + v(\hat{T}) =$$

$$\big(v(\hat{S} \cap I_1) + \cdots + v(\hat{S} \cap I_{n-1})\big) + \big(v(\hat{T} \cap I_2) + \cdots + v(\hat{T} \cap I_n)\big) =$$

$$\big(v(\hat{S}\cap I_1)+v(\hat{T}\cap I_1)\big)+\cdots+\big(v(\hat{S}\cap I_n)+v(\hat{T}\cap I_n)\big)=v(I_1)+\cdots+v(I_n),$$

ya que para $k=1,\ldots,n$

$$I_k=\big(\hat{S}\cap I_k\big)\cup\big(\hat{T}\cap I_k\big)$$

es una partición disjunta de I_k en dos intervalos.

ii. Probemos ahora que la diferencia de dos intervalos acotados se puede expresar como unión finita disjunta de intervalos acotados.

Como la intersección de dos intervalos es un intervalo, es suficiente probar que para cada intervalo I de $\mathbb{R}^N$, el conjunto $\mathbb{R}^N\setminus I$ se puede expresar como unión finita de intervalos disjuntos dos a dos. Para evitar casos triviales, podemos suponer que $\emptyset\neq I\neq\mathbb{R}^N$.

Probaremos que es cierta la afirmación anterior por inducción sobre N. Para $N=1$, es claro que el complemento de un intervalo es una semirrecta o bien es unión disjunta de dos semirrectas, por tanto, $\mathbb{R}\setminus I$ se expresa como unión de, como máximo, dos intervalos disjuntos. Supuesto que es cierta la afirmación para N, y para cualquier intervalo de $\mathbb{R}^N$, sea I un intervalo de $\mathbb{R}^{N+1}$, luego I coincide con el producto de $N+1$ intervalos de $\mathbb{R}$, que llamaremos I_j $(1\leq j\leq N+1)$. Si notamos $J:=I_1\times\ldots\times I_N$, entonces J es un intervalo de $\mathbb{R}^N$. Por hipótesis de inducción, existe una familia finita $\{C_1,\ldots,C_n\}$ de intervalos de $\mathbb{R}^N$, dos a dos disjuntos, tales que

$$\mathbb{R}^N\setminus J=\cup_{i=1}^n C_i;$$

también $\mathbb{R}\setminus I_{N+1}$ se puede expresar como unión de dos intervalos disjuntos, que llamamos J_1,J_2. Entonces, es claro que

$$\mathbb{R}^{N+1}\setminus I=\Big((\mathbb{R}^N\setminus J)\times\mathbb{R}\big)\cup\big(J\times(\mathbb{R}\setminus I_{N+1})\Big)=\cup_{i=1}^n(C_i\times\mathbb{R})\cup(J\times J_1)\cup(J\times J_2).$$

Es fácil comprobar que los conjuntos que aparecen en la descomposición anterior son intervalos de $\mathbb{R}^{N+1}$ disjuntos dos a dos.

La subaditividad del volumen es consecuencia de i y de la monotonía del volumen. En efecto, si notamos

$$J=I_1\cup(I_2\setminus I_1)\cup(I_3\setminus(I_2\cup I_1))\ldots=I_1\cup(I_2\setminus I_1)\cup((I_3\setminus I_2)\setminus I_1)\ldots.$$

se tiene que

$$v(I)\leq v(J)\leq v(I_1)+\cdots+v(I_n)$$

donde se han utilizado la monotonía del volumen y el apartado ii ya que, por ejemplo,

$$I_2=(I_2\setminus I_1)\cup(I_2\cap I_1).$$

1.4.3. Descomposición de un isomorfismo lineal

1.4.1 Proposición. *Si T es un automorfismo de $\mathbb{R}^N$, probaremos que existen dos isometrías $Q_1,Q_2\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ (norma euclídea) y un operador diagonal D en $\mathbb{R}^N$ con valores propios positivos tales que $Q_1DQ_2=T$.*

Demostración. Antes de iniciar la demostración, es inmediato comprobar la siguiente identidad algebraica para una matriz B cuadrada de orden N:

$$(xB^t|z) = (x|zB), \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^N$$

Para comprobar la igualdad, como ambas expresiones definen aplicaciones bilineales, basta comprobar que coinciden sobre el producto de vectores de una base. En efecto, si $1 \le i, j \le N$ tenemos

$$(e_i B^t|e_j) = ((b_{1i}, \ldots, b_{Ni})|e_j) = b_{ji} = (e_i|(b_{j1}, \ldots, b_{jN})) = (e_i|e_j B) \qquad (*)$$

Sea A la matriz asociada a T (en términos de la base canónica), esto es, $T(x) = xA^t$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, la matriz $S = A^t A$ es simétrica y no singular por ser T un isomorfismo.

Además, la forma cuadrática asociada a S es definida positiva, ya que, si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, usando $(*)$ y que A es una matriz inversible, tenemos

$$(S(x)|x) = (xA^t A|x) = (xA^t|xA^t) = \|xA^t\|_2^2 > 0.$$

Por tanto el operador S tiene N valores propios reales y positivos, que llamamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ (algunos pueden tener multiplicidad mayor que 1 y en tal caso aparecen en la lista repetidos tantas veces como indique su orden de multiplicidad). En general, ocurre que vectores propios asociados a distintos valores propios son ortogonales (es muy fácil de comprobar). Si un valor propio tiene multiplicidad $k > 1$, en el subespacio propio asociado, que tiene dimensión k, se puede obtener un sistema ortonormal con k elementos. Así podemos conseguir una base ortonormal $\{y_1, \ldots, y_N\}$ de $\mathbb{R}^N$ tal que

$$S(y_j) = \lambda_j y_j \quad (1 \le j \le N).$$

Llamamos $\mu_j = \sqrt{\lambda_j} > 0$. Los operadores lineales que intervendrán en la descomposición de T verifican (por definición)

$$Q_2(y_j) = e_j, \quad D(e_j) = \mu_j e_j, \quad Q_1(e_j) = \frac{1}{\mu_j} T(y_j) \quad (1 \le j \le N).$$

Es claro que Q_2 es una isometría , ya que transforma la base ortonormal $\{y_1, \ldots, y_n\}$ en otra ortonormal (la base canónica). También es claro que D es diagonal, con valores propios positivos y que se verifica que $T = Q_1 D Q_2$, ya que es ambos operadores lineales coinciden sobre la base $\{e_1, \ldots, e_N\}$.

Sólo resta probar que Q_1 es una isometría y para ello basta comprobar la imagen de la base canónica es una base ortonormal. En efecto, se tiene que

$$(Q_1(e_k)|Q_1(e_j)) = \frac{1}{\mu_k \mu_j}(T(y_k)|T(y_j)) = \frac{1}{\mu_k \mu_j}(y_k A^t|y_j A^t) =$$

$$\frac{1}{\mu_k \mu_j}(y_k|y_j A^t A) = \frac{1}{\mu_k \mu_j}(y_k|S(y_j)) = \frac{\lambda_j}{\mu_k \mu_j}(y_k|y_j) = \delta_{k,j},$$

donde se ha usado $(*)$, que la base es ortonormal y que $\lambda_j = \mu_j^2$ $(1 \le j \le N)$. $\square$

1.4.4. Cubos diádicos

1.4.2 Definición (de cubo diádico de dimensión N)**.** Dado $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ y $\delta > 0$, llamamos N-*cubo* de lado δ y vértice a al intervalo acotado

$$Q(a,\delta) = [a_1, a_1 + \delta[\times[a_2, a_2 + \delta[\times \ldots \times [a_N, a_N + \delta[.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ notaremos por P_n el conjunto de todos los N-cubos de lado $\frac{1}{2^n}$ con vértice en un punto x de $\mathbb{R}^N$ cuyas coordenadas sean múltiplos enteros de $\frac{1}{2^n}$. Es decir:

$$P_n = \left\{ Q\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : \ x \in \mathbb{R}^N, \ 2^n x \in \mathbb{Z}^N \right\}.$$

Tales intervalos acotados se denominan *cubos diádicos* de dimensión N.

No es difícil probar que para cada natural n la familia P_n constituye una partición (numerable) de $\mathbb{R}^N$.

En $\mathbb{R}^N$ tenemos el siguiente resultado acerca de la expresión de un conjunto abierto como unión de cubos diádicos disjuntos, que será frecuentemente usado.

1.4.3 Proposición (Descomposición canónica en cubos diádicos)**.** *Todo conjunto abierto no vacío G en $\mathbb{R}^N$ es unión de una sucesión (Q_n) de N-cubos diádicos dos a dos disjuntos y cuya adherencia está contenida en G. Además si $K \subset G$ y K es compacto entonces se verifica que $K \subset \cup_{n=1}^m Q_n$ para algún $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Para $n = 1$ sea S_1 el conjunto de los N-cubos diádicos de lado $\frac{1}{2}$ cuya adherencia está contenida en G. Para $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ sea S_n el conjunto de los N-cubos diádicos de lado $\frac{1}{2^n}$ cuya adherencia está contenida en G y no están contenidos en ningún N-cubo diádico de lado mayor que $\frac{1}{2^n}$ cuya adherencia esté contenida a su vez en G. Como $\cup_{n=1}^\infty S_n$ es una familia numerable de N-cubos diádicos, podemos considerar una enumeración $\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ de ésta. Probamos ahora que la sucesión (Q_n) satisface las propiedades deseadas.

Para cada natural n definimos

$$F_n := \begin{cases} \cup\{Q : Q \in S_n\} & \text{si } S_n \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } S_n = \emptyset \end{cases}$$

Es claro que $\cup_{p=1}^\infty Q_p = \cup_{n=1}^\infty F_n$ y que $G \supset \cup_{n=1}^\infty F_n$. Veamos que $G \subset \cup_{n=1}^\infty F_n$. Para ello sea $x \in G$; por ser G abierto en $\mathbb{R}^N$ existe $\rho > 0$ tal que $\overline{B}_\infty(x,\rho) \subset G$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \rho$ y sea $Q \in P_n$ tal que $x \in Q$ (la familia P_n es una partición de $\mathbb{R}^N$). Para todo $y \in \overline{Q}$ se tiene que $\|y - x\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} < \rho$, así resulta que $\overline{Q} \subset G$; por tanto, o bien $Q \in S_n$, o bien $Q \subset Q'$ con $Q' \in S_m$ y $m < n$. En cualquier caso se tiene que $Q \subset \cup_{n=1}^\infty F_n$ por lo que $x \in \cup_{n=1}^\infty F_n$. Hemos demostrado así que $G = \cup_{p=1}^\infty Q_p$.

Veamos que $Q_p \cap Q_q = \emptyset$ para $p \neq q$. Sea $Q_p \in S_m$ y $Q_q \in S_n$. Si $m = n$ entonces Q_p y Q_q son N-cubos diádicos distintos de igual lado y por tanto se tiene que $Q_p \cap Q_q = \emptyset$. Si $m \neq n$, Q_p y Q_q son N-cubos diádicos de distinto lado y, por definición de los conjuntos S_n, el de menor lado no está contenido en el de mayor lado, luego se tiene que $Q_p \cap Q_q = \emptyset$.

Sea ahora $K \subset G$ compacto. Si $G = \mathbb{R}^N$ entonces $Q_p \in S_1$, $\forall p \in \mathbb{N}$ y la existencia de m es inmediata. En otro caso, sea:

$$\alpha = \text{ínf}\{\|y - x\|_\infty : \ x \in K, \ y \in \mathbb{R}^N \setminus G\}.$$

Por ser K compacto y $\mathbb{R}^N \backslash G$ cerrado y ambos disjuntos, ha de ser $\alpha > 0$. Sea n_0 el más pequeño número natural tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \alpha$. Si ahora $x \in K$ y $Q \in P_{n_0}$ es tal que $x \in Q$, se tiene que $\overline{Q} \subset G$ por lo cual, o bien $Q \in S_{n_0}$, o bien $Q \subset Q'$ con $Q' \in S_m$ y $m < n_0$, así resulta que

$$K \subset \cup_{n=1}^{n_0} F_n.$$

Como K es un conjunto acotado es claro que para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\{Q : \ Q \in S_n, \ Q \cap K \neq \emptyset\}$$

es finito, en consecuencia la familia

$$\{Q : \ Q \in S_n, \ Q \cap K \neq \emptyset, \ 1 \leq n \leq n_0\}$$

es finita y, según acabamos de ver, K está contenido en la unión de dicha familia, luego $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \cup_{n=1}^m Q_n$. □

1.4.4 Corolario. *La σ-álgebra generada por los intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$ coincide con la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$.*

Demostración. Sea Σ la σ-álgebra generada por los intervalos acotados de $\mathbb{R}^N$. En vista del resultado anterior se tiene que Σ contiene todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ y por tanto $\mathcal{B} \subset \Sigma$. Veamos que todo intervalo acotado de $\mathbb{R}^N$ pertenece a $\mathcal{B}$ y en consecuencia $\Sigma \subset \mathcal{B}$. En efecto, basta pensar que un intervalo acotado de dimensión N es la intersección de $2N$ semiespacios que obviamente son borelianos por ser abiertos o cerrados. □

1.5. Ejercicios

1. Estudiar el comportamiento de las medidas asociadas a las siguientes funciones de distribución.

i. $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ x + 2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3, \\ 5 & \text{si} \quad 3 \leq x. \end{cases}$$

ii. $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ x+2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3, \\ E(x)+5 & \text{si} \quad 3 \leq x. \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Integral asociada a una medida

2.1. Funciones medibles

2.1.1. Funciones medibles y funciones simples

2.1.1 Definición (Función medible)**.** Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *medible* si

$$f^{-1}(A) \in \Sigma$$

para todo $A \in \mathcal{B}$.

La anterior definición no es más que un caso particular de la noción de aplicación medible entre espacios medibles que precisamos a continuación.

2.1.2 Definición. Sean (Ω_1, Σ_1) y (Ω_2, Σ_2) espacios medibles, se dice que una aplicación $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ es *medible* cuando

$$f^{-1}(B) \in \Sigma_1$$

para todo $B \in \Sigma_2$.

Las funciones medibles en un espacio medible (Ω, Σ) no son pues otra cosa que las aplicaciones medibles con valores en $\mathbb{R}$ cuando éste se considera provisto de su σ-álgebra de Borel.

Observación 2.1.3.

i. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Se puede definir entonces una medida μ_f en la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

para todo $A \in \mathcal{B}$. Esta nueva medida recibe el nombre de *medida imagen de μ por f*.

ii. Sean (Ω_1, Σ_1) y (Ω_2, Σ_2) espacios medibles y sea $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ una aplicación. Teniendo en cuenta que

$$f^{-1}(\Omega_2) = \Omega_1,$$

$$f^{-1}(\Omega_2 \setminus B) = \Omega_1 \setminus f^{-1}(B)$$

y

$$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$$

podemos afirmar que la familia

$$\left\{ B \in \Sigma_2 : f^{-1}(B) \in \Sigma_1 \right\}$$

es una σ-álgebra contenida en Σ_2. En consecuencia, para comprobar que f es medible basta verificar la condición de medibilidad para una familia de subconjuntos de Σ_2 que genere la Σ_2. Puesto que la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^N$ está generada por los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$, tenemos en particular que, si (Ω, Σ) es un espacio medible, entonces una aplicación $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es medible si, y sólo si, verifica la condición

$$f^{-1}(G) \subset \Sigma$$

para todo subconjunto abierto G de $\mathbb{R}^N$. En consecuencia cualquier aplicación continua de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^M$ es medible.

Hemos observado anteriormente que para comprobar la medibilidad de una función podemos limitarnos a estudiar la condición de medibilidad para una familia generadora de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Recordemos ahora que los intervalos acotados generan esta σ-álgebra y que está también generada por cada una de las siguientes clases de intervalos de $\mathbb{R}$:

$$\{]-\infty, \alpha[: \ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

$$\{[\alpha, +\infty[: \ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

$$\{]-\infty, \alpha] : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

y

$$\{]\alpha, +\infty[: \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

En consecuencia obtenemos la siguiente caracterización de la medibilidad de una función.

2.1.4 Proposición. *Sean (Ω, Σ) un espacio medible y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. f es medible.

ii. *El conjunto* $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < \alpha\}$ *es medible para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

iii. *El conjunto* $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq \alpha\}$ *es medible para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv. *El conjunto* $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \leq \alpha\}$ *es medible para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

v. *El conjunto* $\{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\}$ *es medible para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.5.

i. Sean (Ω_1, Σ_1), (Ω_2, Σ_2) y (Ω_3, Σ_3) espacios medibles. Si $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ y $g : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_3$ son aplicaciones medible. Entonces la composición $g \circ f$ es medible.

ii. La restricción a un subconjunto medible (con la σ-álgebra inducida) de una función medible es medible.

iii. Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Recordemos que la función característica de un subconjunto A de Ω, χ_A, es la función de Ω en $\mathbb{R}$ definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}.$$

Se tiene que χ_A es medible si, y sólo si, el conjunto A es medible. En efecto, basta observar que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\{\omega \in \Omega : \ \chi_A(\omega) < \alpha\} = \begin{cases} \Omega \setminus A & \text{si} \quad \alpha \leq 0 \\ A & \text{si} \quad \alpha > 0 \end{cases}.$$

iv. Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Si $E \in \Sigma$ y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces a f le asociamos la función $f\chi_E : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (prolongación por cero fuera de E) dada por

$$(f\chi_E)(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{si} \quad \omega \in E \\ 0 & \text{si} \quad \omega \in \Omega \setminus E. \end{cases}$$

Entonces f es medible si, y sólo si $f\chi_E$ es medible. En efecto, para B abierto de $\mathbb{R}$ se tiene que

$$(f\chi_E)^{-1}(B) = \begin{cases} E^c \cup \{\omega \in E : f(\omega) \in B\} = E^c \cup f^{-1}(B) & \text{si} \quad 0 \in B \\ \{\omega \in E : f(\omega) \in B\} = f^{-1}(B) & \text{si} \quad 0 \notin B \end{cases}$$

Por otra parte, la inclusión de E en Ω es medible, luego la restricción de $f\chi_E$ a E es medible, por ser composición de medibles ($f = f\chi_E \circ i_E$).

v. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida completo. Si $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones iguales c.p.d., entonces f es medible si, y sólo si, lo es g. En efecto, supongamos por ejemplo que la función f es medible y que el conjunto $Z = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}$ es de medida cero. Para $A \in \mathcal{B}$ se tiene que

$$\begin{aligned} g^{-1}(A) &= (g^{-1}(A) \cap Z) \cup (g^{-1}(A) \cap Z^c) \\ &= (g^{-1}(A) \cap Z) \cup (f^{-1}(A) \cap Z^c) \end{aligned}$$

es medible ya que $g^{-1}(A) \cap Z$ es medible por ser μ completa, y $f^{-1}(A) \cap Z^c$ es medible por ser f medible.

Obsérvese que si la medida no es completa dos funciones iguales c.p.d. no tienen que ser simultáneamente medibles. En efecto, si es A un subconjunto no medible de un conjunto Z de medida cero, entonces las funciones $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(\omega) = 0, \ \ \forall \omega \in \Omega, \quad g(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \omega \in \Omega \backslash Z \\ 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 2 & \text{si} \quad \omega \in Z \backslash A \end{cases}$$

son iguales c.p.d. pues

$$\{\omega \in \Omega : f(\omega) \neq g(\omega)\} = Z.$$

f es medible y sin embargo, como

$$g^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega : g(\omega) = 1\} = A,$$

y $\{1\}$ es un boreliano, concluimos que g no es medible.

vi. Sea (Ω, Σ) un espacio medible y sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces la función $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(\omega) = (f(\omega), g(\omega))$ para todo $\omega \in \Omega$ es medible si, y sólo si, lo son f y g. En efecto, si G es un abierto de $\mathbb{R}^2$, entonces existen dos sucesiones (I_n) y (J_n) de intervalos acotados de $\mathbb{R}$ tales que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \times J_n$ con lo que concluimos que

$$h^{-1}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} h^{-1}(I_n \times J_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[f^{-1}(I_n) \cap g^{-1}(J_n) \right] \in \Sigma.$$

vii. El espacio de medida de mayor importancia para nosotros es sin duda $\mathbb{R}^N$ con la medida de Lebesgue y para éste disponemos ya de los siguientes ejemplos básicos de funciones medibles. Si $E \subset \mathbb{R}^N$ es cualquier conjunto medible, entonces las siguientes funciones definidas sobre E son medibles:

- las continuas,
- las continuas c.p.d.,
- las iguales c.p.d. a una medible y en particular las iguales c.p.d. a una continua,

- las composiciones de una medible y una continua.

En este contexto es conveniente advertir que precisamente en este espacio medible $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M})$ *cualquier conjunto susceptible de ser construido con las técnicas básicas de la Teoría de conjuntos es medible y, en consecuencia, cualquier función definida mediante el uso de las técnicas habituales del Análisis es medible.*

2.1.6 Proposición (Estabilidad algebraica de las funciones medibles)**.** *Sean* (Ω, Σ) *un espacio medible,* $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones medibles y* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Entonces las funciones* $f + g$*,* αf *y* fg *son medibles. Si además suponemos que* f *no se anula, entonces la función* $\frac{1}{f}$ *también es medible.*

Demostración. Recordemos que la aplicación $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$h(\omega) = (f(\omega), g(\omega))$$

para todo $\omega \in \Omega$ es medible. Por otra parte, como las funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad (x, y) \mapsto xy$$

son continuas, se deduce que las funciones obtenidas por composiciones con h de éstas son medibles, esto es $f + g$ y fg son medibles.

Por último, si f no se anula, basta componer la función medible f con la función continua $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}$ para obtener la medibilidad de $\frac{1}{f}$. □

Consideramos ahora las funciones medibles más sencillas: las funciones simples. Será clave en la teoría el hecho de que cualquier función medible positiva es límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas.

2.1.7 Definición (Función simple)**.** Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Una función $s : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *simple* si es medible y su imagen es un conjunto finito, esto es, $s(\Omega) = \left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right\}$ para convenientes $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$. Claramente los conjuntos

$$A_i := \{\omega \in \Omega : s(\omega) = \alpha_i\} \quad (i = 1, \ldots, m),$$

son medibles y forman una partición de Ω. La función s se expresa entonces en la forma

$$s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

2.1.8 Proposición (Estabilidad algebraica de las funciones simples)**.** *Sean* (Ω, Σ) *un espacio medible,* $s, t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones simples y* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Entonces las funciones* $f + g$*,* αf *y* fg *son simples. Si además suponemos que* f *no se anula, entonces la función* $\frac{1}{f}$ *también es simple.*

2.1.2. Sucesiones y series de funciones medibles

2.1.9 Proposición (Sucesiones de funciones medibles)**.** *Sea* (Ω,Σ) *un espacio medible y sea* (f_n) *una sucesión de funciones medibles en* Ω*. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

i. El conjunto $E = \{\omega \in \Omega :\ (f_n(\omega))$ *es mayorada*$\}$ *es medible y si dicho conjunto no es vacío, la función* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(\omega) = \sup\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$$

para todo $\omega \in E$ *es medible.*

ii. El conjunto $E = \{\omega \in \Omega :\ (f_n(\omega))$ *es minorada*$\}$ *es medible y si dicho conjunto no es vacío, la función* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(\omega) = \text{ínf}\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$$

para todo $\omega \in E$ *es medible.*

iii. El conjunto $E = \{\omega \in \Omega :\ \text{lím sup} f_n(\omega) \in \mathbb{R}\}$ *es medible y si dicho conjunto no es vacío, la función* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(\omega) = \text{lím sup} f_n(\omega)$$

para todo $\omega \in E$ *es medible.*

iv. El conjunto $E = \{\omega \in \Omega :\ \text{lím inf} f_n(\omega) \in \mathbb{R}\}$ *es medible y en caso de ser no es vacío, la función* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(\omega) = \text{lím inf} f_n(\omega)$$

para todo $\omega \in E$ *es medible.*

v. El conjunto $E = \{\omega \in \Omega :\ (f_n(\omega))$ *es convergente*$\}$ *es medible y si dicho conjunto no es vacío la función* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(\omega) = \text{lím} f_n(\omega)$$

para todo $\omega \in E$ *es medible.*

Demostración. i. Es inmediato que

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \le m\}\right],$$

y, por tanto, $E \in \Sigma$. Por otra parte, supuesto $E \neq \emptyset$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\{\omega \in E :\ f(\omega) \le \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega \in E :\ f_n(\omega) \le \alpha\} = E \cap \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \le \alpha\}$$

es medible, de donde se deduce que f es medible.

ii. Aplíquese i a la sucesión $(-f_n)$.

iii. El conjunto

$$F = \{\omega \in \Omega : \ (f_n(\omega)) \text{ es mayorada}\}$$

es medible por i. Es claro que si $F = \emptyset$, entonces también $E = \emptyset$. Supuesto $F \neq \emptyset$, consideremos, para cada natural n, la función $g_n : F \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_n(\omega) = \sup\{f_k(\omega) : \ k \geq n\}$$

para todo $\omega \in F$, que es medible por i. Es claro que

$$E = \{\omega \in F : \ (g_n(\omega)) \text{ es minorada}\}$$

que es medible por ii. Supuesto $E \neq \emptyset$ se tiene que $f(\omega) = \text{ínf}\{g_n(\omega) : \ n \in \mathbb{N}\}$ también es medible por ii.

iv. Aplíquese iii a la sucesión $(-f_n)$.

v. Se consideran los conjuntos

$$F_1 = \{\omega \in \Omega : \ \text{lím sup} f_n(\omega) \in \mathbb{R}\}$$

y

$$F_2 = \{\omega \in \Omega : \ \text{lím inf} f_n(\omega) \in \mathbb{R}\},$$

que son medibles (por iii y iv). Es claro que si $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, entonces $E = \emptyset$. Supuesto $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, las funciones $g : F_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(\omega) = \text{lím sup} f_n(\omega)$, $\forall \omega \in F_1$ y $h : F_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(\omega) = \text{lím inf} f_n(\omega)$, $\forall \omega \in F_2$ son medibles por iii y iv, respectivamente. Entonces

$$E = \{\omega \in F_1 \cap F_2 : \ g(\omega) = h(\omega)\} = F_1 \cap F_2 \cap (g-h)^{-1}(\{0\})$$

es medible y finalmente, supuesto $E \neq \emptyset$, como $f(\omega) = g(\omega)(= h(\omega)), \forall \omega \in E$, concluimos que la función f también es medible. □

2.1.10 Proposición (Series de funciones medibles)**.** *Sea* (Ω, Σ) *un espacio medible y sea* $\sum f_n$ *una serie de funciones medibles en* Ω*. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

i. El conjunto $E = \{\omega \in \Omega : \ \sum f_n(\omega)$ *es convergente*$\}$ *es medible y la función* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega$ *es medible.*

ii. El conjunto $E = \{\omega \in \Omega : \ \sum f_n$ *es absolutamente convergente en* $\omega\}$ *es medible.*

Demostración. i. Aplíquese la Proposición 2.1.8.v a la sucesión de funciones $(\sum_{k=1}^{n} f_k)$, las cuales son medibles en virtud de la proposición 2.1.6.

ii. Basta ahora con aplicar el apartado anterior a la serie de funciones medibles $\sum |f_n|$. □

2.1.11 Teorema (de aproximación de Lebesgue)**.** *Sea* (Ω, Σ) *un espacio medible y sea* $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty[$ *una función medible. Entonces, existe una sucesión creciente* (s_n) *de funciones simples positivas que converge puntualmente a* f *en* Ω*.*

Demostración. Fijado n natural, definimos

$$E_n = \left\{ \omega \in \Omega : n \leq f(\omega) \right\}$$

y, para $k = 1, 2, \ldots, n2^n$,

$$E_{n,k} := \left\{ \omega \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k}{2^n} \right\}.$$

Como f es medible, los conjuntos E_n y $E_{n,k}$ también lo son. Definimos entonces la función simple

$$s_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n\chi_{E_n}.$$

(obsérvese que los conjuntos cuyas funciones características aparecen en la definición anterior forman una partición de Ω).

Probemos que la sucesión (s_n) así obtenida es creciente, es decir,

$$s_n(\omega) \leq s_{n+1}(\omega), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega.$$

Sea $\omega \in \Omega$. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\omega \in E_n$, entonces

$$s_n(\omega) = n = \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} \leq f(\omega),$$

y, por tanto, $s_n(\omega) \leq s_{n+1}(\omega)$. En otro caso, si $\omega \in E_{n,k}$, entonces al ser

$$\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right[= \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right[\cup \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right[.$$

o bien $\omega \in E_{n+1,2k-1}$ ó $\omega \in E_{n+1,2k}$. En el primer caso,

$$s_n(\omega) = \frac{k-1}{2^n} = s_{n+1}(\omega),$$

mientras que en el segundo

$$s_n(\omega) = \frac{k-1}{2^n} < \frac{2k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(\omega).$$

Veamos ahora que para $\omega \in \Omega$ se verifica

$$\lim_{n\to\infty} s_n(\omega) = f(\omega).$$

Sea $\omega \in \Omega$ y sea n un natural tal que $f(\omega) < n$. Se tiene entonces que

$$s_n(\omega) \leq f(\omega) < s_n(\omega) + \frac{1}{2^n}.$$

Así, para n suficientemente grande, se verifica que

$$0 \leq f(\omega) - s_n(\omega) < \frac{1}{2^n},$$

de donde se obtiene la convergencia anunciada. $\square$

2.1.12 Corolario. *Sea* (Ω, Σ) *un espacio medible y sea* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i. f *es medible.*

ii. Existe una sucesión (s_n) *de funciones simples en* Ω *que converge a* f.

2.2. Integral asociada a una medida

2.2.1. Definición de integral asociada a una medida

2.2.1 Definición (Integral de una función simple positiva)**.** Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $s\colon \Omega \longrightarrow [0, +\infty[$ una función simple. Entonces

$$s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i},$$

donde $\{A_1, \ldots, A_m\}$ es una partición de Ω en conjuntos medibles y se define la integral de s como el elemento de $[0, \infty]$ dado por:

$$\int_\Omega s\, d\mu := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i).$$

Observación 2.2.2. Conviene observar que la medida de cualquier conjunto medible E puede expresarse como

$$\mu(E) = \int_\Omega \chi_E d\mu = \int_E d\mu_E.$$

Estas identidades son importantes porque nos permitirán en su momento calcular medidas utilizando técnicas de integración.

2.2.3 Definición (Integral de una función medible positiva)**.** Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty[$ una función medible. Se define la integral de f como el elemento de $[0, \infty]$ dado por

$$\int_\Omega f\, d\mu := \sup\left\{ \int_\Omega s\, d\mu :\ s \ \text{simple},\ 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se definen las funciones

$$f^+,\ f^- : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$f^+(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{si} \quad f(\omega) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(\omega) < 0 \end{cases}$$

y

$$f^-(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(\omega) \geq 0 \\ -f(\omega) & \text{si} \quad f(\omega) < 0. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que

$$f = f^+ - f^-,$$

y

$$|f| = f^+ + f^-.$$

2.2.4 Definición (Función integrable e integral de una función integrable)**.** Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Se dice que f es *integrable* si la función medible positiva $|f|$ verifica

$$\int_\Omega |f| d\mu < \infty.$$

Si f es integrable, entonces las funciones f^+ y f^- son medibles positivas y tienen integral finita, puesto que $f^+ \leq |f|$ y $f^- \leq |f|$, podemos definir

$$\int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu.$$

2.2.2. Integral de funciones simples positivas

Comprobamos en primer lugar que la definición que acabamos de dar de integral para una función simple positiva es independiente de la expresión de la función simple que elijamos. Supongamos que se da la igualdad

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j},$$

donde $m, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \alpha_i, \beta_j < +\infty \ \ \forall i, j$ y $\{A_1, \ldots, A_m\}, \{B_1, \ldots, B_n\}$ son dos particiones de Ω en conjuntos medibles, entonces comprobaremos que se verifica la igualdad

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j).$$

En efecto, usando que la medida es aditiva y que si para ciertos índices i, j se verifica que $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, entonces evaluando la función simple en esta intersección se tiene $\alpha_i = \beta_j$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu\Big(A_i \cap \Big(\cup_{j=1}^n B_j\Big)\Big) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu\Big(\cup_{j=1}^n (A_i \cap B_j)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^m \alpha_i \sum_{j=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^m \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^n \beta_j \mu\Big(\cup_{i=1}^m (B_j \cap A_i)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j).
\end{aligned}$$

2.2.5 Proposición. *[Propiedades de la integral de funciones simples positivas] Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida. Si $s,t:\Omega\longrightarrow[0,\infty[$ son funciones simples y $\alpha\in[0,\infty[$, entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

i. $\int_\Omega(s+t)\,d\mu=\int_\Omega s\,d\mu+\int_\Omega t\,d\mu$.

ii. $\int_\Omega(\alpha s)\,d\mu=\alpha\int_\Omega s\,d\mu$.

iii. $\Big[s\le t\Big]\Rightarrow\int_\Omega s\,d\mu\le\int_\Omega t\,d\mu$.

iv. $\int_\Omega s\,d\mu=0$ *si, y sólo si,* $s=0$ *c.p.d.*

Demostración. Pongamos

$$s=\sum_{i=1}^m\alpha_i\chi_{A_i}\quad\text{y}\quad t=\sum_{j=1}^n\beta_j\chi_{B_j},$$

con m,n naturales, $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_n\in[0,\infty[$ y $\{A_1,\ldots,A_m\},\{B_1,\ldots B_n\}$ particiones de Ω en conjuntos medibles.

i. Es claro que

$$\{A_i\cap B_j:1\le i\le m,1\le j\le n\}$$

es una partición de Ω en conjuntos medibles (algunos de los cuales pueden ser el vacío y por tanto se pueden suprimir). Se tiene que

$$s+t=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(\alpha_i+\beta_j)\chi_{A_i\cap B_j}.$$

Por tanto,

$$\int_\Omega(s+t)\,d\mu=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{i=1}^m\alpha_i\sum_{j=1}^n\mu(A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^n\beta_j\sum_{i=1}^m\mu(A_i\cap B_j).$$

Usando que los conjuntos $\{B_1,\ldots,B_n\},\{A_1,\ldots,A_m\}$ son particiones de Ω y la aditividad de la medida se tiene que

$$\sum_{j=1}^n\mu(A_i\cap B_j)=\mu(A_i),\qquad\sum_{i=1}^m\mu(A_i\cap B_j)=\mu(B_j).$$

Usando estas igualdades válidas para $1\le i\le m,1\le j\le n$, se obtiene que

$$\int_\Omega(s+t)\,d\mu=\int_\Omega s\,d\mu+\int_\Omega t\,d\mu.$$

ii. Se tiene que

$$\int_\Omega(\alpha s)\,d\mu=\sum_{i=1}^m\alpha\alpha_i\mu(A_i)=\alpha\sum_{i=1}^m\alpha_i\mu(A_i)=\alpha\int_\Omega s\,d\mu.$$

iii. Como $s \leq t$ por hipótesis, entonces si $\omega \in A_i \cap B_j \neq \emptyset$ tenemos que $s(\omega) = \alpha_i \leq \beta_j = t(\omega)$. Por tanto

$$\int_\Omega s\, d\mu = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \int_\Omega t\, d\mu.$$

iv. Se tiene que

$$\int_\Omega s\, d\mu = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i \mu(A_i) = 0, i = 1, \ldots, m \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_i = 0 \\ \text{ó} \\ \mu(A_i) = 0 \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq m \quad \Leftrightarrow s = 0 \text{ c.p.d..}$$

□

2.2.3. Integral de funciones medibles positivas

El siguiente resultado junto con el Teorema de aproximación de Lebesgue permiten obtener cómodamente las propiedades de la integral de las funciones medibles positivas.

2.2.6 Proposición. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty[$ una función medible. Si (s_n) es una sucesión creciente de funciones simples positivas que converge puntualmente a f en Ω, entonces*

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim \int_\Omega s_n\, d\mu.$$

Demostración. De la definición de integral para funciones medibles positivas se deduce que

$$\int_\Omega s_n\, d\mu \leq \int_\Omega f\, d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto,

$$\lim \int_\Omega s_n\, d\mu \leq \int_\Omega f\, d\mu.$$

Para probar la otra desigualdad, sea s una función simple positiva con $s \leq f$ y sea $0 < \rho < 1$. Para cada natural n definimos

$$F_n := \Big\{ \omega \in \Omega : \ s_n(\omega) \geq \rho s(\omega) \Big\}.$$

Obtenemos así una sucesión creciente de conjuntos medibles tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \Omega.$$

En efecto, para cada $\omega \in \Omega$, se tiene

$$\begin{cases} f(\omega) = 0 \quad \Rightarrow & \omega \in F_1 \\ f(\omega) > 0 \quad \Rightarrow \quad \rho s(\omega) < f(\omega) \ (\rho < 1) & \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \omega \in F_n \end{cases}.$$

Supuesto que $s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$, para cada natural n se verifica que

$$\rho \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(A_k \cap F_n) = \sum_{k=1}^{m} \rho \alpha_k \mu(A_k \cap F_n) =$$
$$\int_{\Omega} \rho s \chi_{F_n} \, d\mu \leq \int_{\Omega} s_n \chi_{F_n} \, d\mu \leq \int_{\Omega} s_n \, d\mu, \quad (2.1)$$

donde se ha utilizado la definición de F_n y la monotonía de la integral. Para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, $(A_k \cap F_n)$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_k \cap F_n) = A_k,$$

y por tanto se sigue de la propiedad de crecimiento continuo de μ que

$$\mu(A_k) = \lim_n \mu\big(A_k \cap F_n\big).$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ en (2.1) obtenemos que

$$\rho \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(A_k) \leq \lim \int_{\Omega} s_n \, d\mu,$$

es decir,

$$\rho \int_{\Omega} s \, d\mu \leq \lim \int_{\Omega} s_n \, d\mu.$$

Tomando ahora en la desigualdad anterior límite cuando $\rho \to 1$ obtenemos que

$$\int_{\Omega} s \, d\mu \leq \lim \int_{\Omega} s_n \, d\mu.$$

Considerando por último la arbitrariedad de s, concluimos que

$$\int_{\Omega} f \, d\mu \leq \lim \int_{\Omega} s_n \, d\mu.$$

□

2.2.7 Proposición (Propiedades de la integral de funciones medibles positivas)**.** *Sea* (Ω,Σ,μ) *un espacio de medida. Si* $f,g:\Omega\longrightarrow[0,\infty[$ *son funciones medibles y* $\alpha\in[0,\infty[$*, entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

i. $\int_\Omega(f+g)\,d\mu=\int_\Omega f\,d\mu+\int_\Omega g\,d\mu$.

ii. $\int_\Omega(\alpha f)\,d\mu=\alpha\int_\Omega f\,d\mu$.

iii. $\left[f\le g\right]\Rightarrow\int_\Omega f\,d\mu\le\int_\Omega g\,d\mu$.

iv. $\int_\Omega f\,d\mu=0$ *si, y sólo si,* $f=0$ *c.p.d.*

Además si $f=g$ *c.p.d., entonces* $\int_\Omega f\,d\mu=\int_\Omega g\,d\mu$.

Demostración. i. El Teorema de aproximación de Lebesgue nos asegura la existencia de dos sucesiones crecientes (s_n) y (t_n) de funciones simples positivas con $\text{lím}\,s_n=f$ y $\text{lím}\,t_n=g$. En consecuencia (s_n+t_n) es también una sucesión creciente de funciones simples positivas con $\text{lím}(s_n+t_n)=f+g$. En virtud de la proposición anterior se tiene que

$$\int_\Omega(f+g)\,d\mu=\text{lím}\int_\Omega(s_n+t_n)\,d\mu=\text{lím}\left(\int_\Omega s_n\,d\mu+\int_\Omega t_n\,d\mu\right)=$$

$$\text{lím}\int_\Omega s_n\,d\mu+\text{lím}\int_\Omega t_n\,d\mu=\int_\Omega f\,d\mu+\int_\Omega g\,d\mu.$$

ii. Es inmediata de la definición.

iii. Si $s:\Omega\longrightarrow[0,\infty[$ es una función simple con $s\le f$, entonces $s\le g$, y por tanto

$$\int_\Omega s\,d\mu\le\int_\Omega g\,d\mu.$$

En consecuencia

$$\int_\Omega f\,d\mu\le\int_\Omega g\,d\mu.$$

En el argumento hemos utilizado dos veces la definición de integral de una función medible positiva.

iv. Sea (s_n) una sucesión creciente de funciones simples positivas convergente a f.

Supuesto que $\int_\Omega f\,d\mu=0$, entonces $\int_\Omega s_n\,d\mu=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, y en virtud del apartado iv) de la Proposición 2.2.5 es $s_n=0$ c.p.d., $\forall n\in\mathbb{N}$, de donde concluimos que $f=0$ c.p.d. (pues $\{\omega\in\Omega:f(\omega)\neq0\}\subset\cup_{n\in\mathbb{N}}\{\omega\in\Omega:s_n(\omega)\neq0\}$).

Supongamos ahora que $f=0$ c.p.d. Entonces, como $0\le s_n\le f$, se tiene que

$$s_n=0\qquad\text{c.p.d.},\qquad\forall n\in\mathbb{N},$$

luego

$$\int_\Omega s_n\,d\mu=0,\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

y por tanto $\int_\Omega f\, d\mu = 0$.

Finalmente, como para cualesquiera dos funciones medibles positivas f y g se verifica

$$f \leq |f-g| + g,$$

de los apartados iii) y i) anteriores se deduce que

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega |f-g|\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu.$$

Si suponemos que $f = g$ c.p.d., entonces, teniendo en cuenta iv) deducimos que

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu.$$

De igual forma

$$\int_\Omega g\, d\mu \leq \int_\Omega f\, d\mu,$$

por lo que

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu.$$

□

Observación 2.2.8. De la última afirmación se deduce que para calcular la integral de una función medible positiva pueden ignorarse, si así se desea, los valores que toma dicha función en un conjunto de medida cero. Esto es, el conocimiento de una función medible positiva en algún subconjunto medible E de Ω tal que $\mu(\Omega \backslash E) = 0$, es suficiente para calcular la integral de dicha función.

2.2.4. Funciones integrables

Claramente si una función medible positiva tiene integral finita, entonces ésta es integrable y su integral coincide con la integral como función medible positiva (lo cual legitima la notación introducida). Más generalmente, conviene observar que si g y h son funciones medibles positivas tales que

$$\int_\Omega g\, d\mu < \infty, \quad \int_\Omega h\, d\mu < \infty \quad \text{y} \quad f = g - h,$$

entonces f es integrable y

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu - \int_\Omega h\, d\mu.$$

En efecto, es claro que $|f|$ es medible y las propiedades de la integral de una función medible positiva nos aseguran que

$$\int_\Omega |f|\, d\mu = \int_\Omega |g-h|\, d\mu \leq \int_\Omega (g+h)\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu + \int_\Omega h\, d\mu < \infty.$$

Por otra parte, al ser $f^+ + h = f^- + g$, se sigue que

$$\int_\Omega f^+ \, d\mu + \int_\Omega h \, d\mu = \int_\Omega f^- \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu,$$

y en consecuencia

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu - \int_\Omega h \, d\mu.$$

2.2.9 Proposición (Propiedades de la integral)**.** *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida. Si* $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *son funciones integrables y* α *es un número real, se verifican las siguientes afirmaciones:*

i. $f+g$ *es integrable y* $\int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$.

ii. αf *es integrable y* $\int_\Omega (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu$.

iii. $\left[f \leq g \right] \Rightarrow \int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$.

iv. $|\int_\Omega f \, d\mu| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu$.

Además si f *y* g *son medibles e iguales c.p.d., entonces*

$$f \text{ es integrable } \Leftrightarrow g \text{ es integrable},$$

en cuyo caso

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu.$$

Demostración. i. Puesto que $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$, el resultado se deduce de la aditividad de la integral para funciones medibles positivas y de la observación hecha antes.

ii. Sabemos que αf es medible y que

$$\int_\Omega |\alpha f| \, d\mu = \int_\Omega |\alpha| \, |f| \, d\mu = |\alpha| \int_\Omega |f| \, d\mu < \infty,$$

y por tanto αf es integrable. Por otra parte $\alpha f = \alpha f^+ - \alpha f^-$, por lo que si $\alpha \geq 0$ se tiene que

$$\int_\Omega (\alpha f) \, d\mu = \int_\Omega (\alpha f^+) \, d\mu - \int_\Omega (\alpha f^-) \, d\mu = \alpha \int_\Omega f^+ \, d\mu - \alpha \int_\Omega f^- \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu,$$

y si $\alpha < 0$, entonces es

$$\int_\Omega (\alpha f) \, d\mu = \int_\Omega (-\alpha f^-) \, d\mu - \int_\Omega (-\alpha f^+) \, d\mu = -\alpha \int_\Omega f^- \, d\mu + \alpha \int_\Omega f^+ \, d\mu = \alpha \int_\Omega f \, d\mu.$$

iii. Se tiene que

$$f^+ - f^- \leq g^+ - g^- \Rightarrow f^+ + g^- \leq g^+ + f^- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (f^+ + g^-)\ d\mu \leq \int_\Omega (g^+ + f^-)\ d\mu \Rightarrow$$

$$\int_\Omega f^+\ d\mu + \int_\Omega g^-\ d\mu \leq \int_\Omega g^+\ d\mu + \int_\Omega f^-\ d\mu \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \int_\Omega f^+\ d\mu - \int_\Omega f^-\ d\mu \leq \int_\Omega g^+\ d\mu - \int_\Omega g^-\ d\mu,$$

es decir,

$$\int_\Omega f\ \ d\mu \leq \int_\Omega g\ \ d\mu.$$

iv. Como $|f|$ es claramente integrable y $-|f| \leq f \leq |f|$, los apartados anteriores nos dan

$$-\int_\Omega |f|\ d\mu \leq \int_\Omega f\ d\mu \leq \int_\Omega |f|\ d\mu,$$

es decir,

$$\left|\int_\Omega f\ d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\ d\mu.$$

Finalmente si f, g son medibles e iguales c.p.d., entonces $|f| = |g|$ c.p.d. y la Proposición 2.2.7 garantiza que

$$\int_\Omega |f|\ d\mu = \int_\Omega |g|\ d\mu,$$

lo que prueba que f es integrable si, y sólo si, lo es g. Por otra parte, como $|f-g| = 0$ c.p.d., si f y g son integrables, entonces concluimos que

$$\left|\int_\Omega f\ d\mu - \int_\Omega g\ d\mu\right| = \left|\int_\Omega (f-g)\ d\mu\right| \leq \int_\Omega |f-g|\ d\mu = 0,$$

donde se ha aplicado nuevamente la Proposición 2.2.7.

□

Observación 2.2.10. De la última afirmación de la proposición anterior se deduce que para estudiar la integrabilidad, y el valor de la integral cuando proceda, de una función medible pueden ignorarse los valores que dicha función toma en un conjunto cualquiera de medida cero.

2.2.11 Proposición. *Sean (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, $E \in \Sigma$, $E \subset D \subset \Omega$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces $f_{|E}$ es integrable en E si, y sólo si, $f\chi_E$ es integrable en Ω, en cuyo caso*

$$\int_E f_{|E}\ d\mu_E = \int_\Omega f\chi_E\ d\mu.$$

Demostración. Sabemos que $f_{|E}$ es medible en (E,Σ_E) si, y sólo si, $f\chi_E$ es medible en (Ω,Σ), por lo que para la demostración daremos por supuesta la medibilidad de ambas funciones.

Supongamos en primer lugar que $0 \leq f$. Tomemos una sucesión creciente de funciones simples positivas (s_n) que converge puntualmente a $f\chi_E$. Es claro entonces que $(s_{n|E})$ es una sucesión creciente de funciones simples positivas definidas en E que converge puntualmente a $f_{|E}$. Por la Proposición 2.2.6 aplicada a las funciones $f_{|E}$ y $f\chi_E$ tenemos que

$$\int_E f_{|E}\, d\mu_E = \text{lím} \int_E s_{n|E}\, d\mu_E \ \text{ y } \ \int_\Omega f\chi_E\, d\mu = \text{lím} \int_\Omega s_n\chi_E\, d\mu.$$

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $s_n(\omega) = 0$ para todo $\omega \in E^c$, luego si

$$s_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$$

para convenientes $m \in \mathbb{N}, \alpha_1,\dots,\alpha_m \in [0,\infty[$ y $\{A_1,\dots,A_m\}$ partición de Ω en conjuntos medibles, necesariamente ha de ocurrir que

$$\alpha_k = 0, \quad \text{si } 1 \leq k \leq m \ \text{ y } \ A_k \cap E^c \neq \emptyset,$$

luego

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu_E(A_k \cap E) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(A_k),$$

y, por tanto

$$\int_E s_{n|E}\, d\mu_E = \int_\Omega s_n\chi_E\, d\mu.$$

Ahora, de las anteriores expresiones se sigue que

$$\int_E f_{|E}\, d\mu_E = \int_\Omega f\chi_E\, d\mu,$$

de donde se obtiene el enunciado. Finalmente, para f arbitraria, aplicando lo anterior a $|f|$ obtenemos que

$$\int_E |f_{|E}|\, d\mu_E = \int_E |f|_{|E}\, d\mu_E = \int_\Omega |f|\chi_E\, d\mu = \int_\Omega |f\chi_E|\, d\mu,$$

por lo que $f_{|E}$ es integrable en E si, y sólo si, $f\chi_E$ es integrable en Ω. Además, es ese supuesto, dado que

$$f_{|E} = f^+_{|E} - f^-_{|E} \qquad \text{y} \qquad f\chi_E = f^+\chi_E - f^-\chi_E,$$

de nuevo aplicando lo anterior a f^+ y f^- obtenemos que

$$\int_E f_{|E}\, d\mu_E = \int_E f^+_{|E}\, d\mu_E - \int_E f^-_{|E}\, d\mu_E = \int_\Omega f^+\chi_E\, d\mu - \int_\Omega f^-\chi_E\, d\mu = \int_\Omega f\chi_E\, d\mu.$$

$\square$

2.2.12 Definición (Integral de una función en conjunto medible)**.** Sean (Ω,Σ,μ) un espacio de medida, $D\subset\Omega$ y $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ una función. Si $E\in\Sigma$ con $E\subset D$, entonces se dice que f es *integrable* en E si se verifica que $f_{|E}$ es una función integrable en el espacio de medida (E,Σ_E,μ_E), y en tal caso definimos la *integral* de f en E por

$$\int_E f\,d\mu := \int_E f_{|E}\,d\mu_E.$$

En virtud del resultado anterior este concepto se puede también expresar en términos del espacio de medida inicial. En efecto, f es integrable en E si se verifica que $f\chi_E$ es integrable en el espacio de medida (Ω,Σ,μ), y en tal caso la integral de f en E viene dada por

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\chi_E\,d\mu.$$

2.2.13 Definición (Integral de una función definida c.p.d.)**.** Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida. Una función f definida c.p.d. en Ω es integrable si lo es en un conjunto medible E con $\mu(E^c)=0$ en el que esté definida, en cuyo caso definimos

$$\int_\Omega f\,d\mu := \int_E f\,d\mu.$$

Esta definición no depende del conjunto medible E. Obsérvese que si F es cualquier otro conjunto medible con $\mu(F^c)=0$ en el que f esté definida y sea integrable, entonces $f\chi_E = f\chi_F$ c.p.d. pues coinciden en $E\cap F$ (con f) y

$$\mu((E\cap F)^c) = \mu(E^c\cup F^c) \le \mu(E^c)+\mu(F^c) = 0,$$

con lo que

$$\int_F f\,d\mu = \int_\Omega f\chi_F\,d\mu = \int_\Omega f\chi_E\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

2.2.14 Proposición (Aditividad respecto del conjunto de integración)**.** *Sean* (Ω,Σ,μ) *un espacio de medida,* $D\subset\Omega$ *y* $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función. Si* $E,F\in\Sigma$ *son disjuntos con* $E\cup F\subset D$*, entonces* f *es integrable en* $E\cup F$ *si, y sólo si,* f *es integrable en* E *y en* F*, y en tal caso*

$$\int_{E\cup F} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_F f\,d\mu.$$

Demostración. Puesto que

$$f\chi_{E\cup F} = f\chi_E + f\chi_F,$$

de las propiedades de las funciones medibles se sigue inmediatamente que

$$f\chi_{E\cup F} \text{ es medible si, y sólo si, } f\chi_E \text{ y } f\chi_F \text{ son medibles.}$$

En tal caso, de las propiedades de la integral de las funciones medibles positivas se tiene que

$$\int_{E\cup F} |f|\, d\mu = \int_E |f|\, d\mu + \int_F |f|\, d\mu,$$

de donde se deduce que f es integrable en $E\cup F$ si, y sólo si, lo es en E y en F , en cuyo caso se verifica la fórmula del enunciado. $\square$

Notación. Sea $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo de extremos α y β con $-\infty\leq\alpha<\beta\leq+\infty$ y $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ una función integrable (respecto de la medida de Lebesgue). Entonces se usa la notación

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$$

para designar la integral $\int_I f\, d\lambda$. En el caso de que F sea una función de distribución en $\mathbb{R}$ y $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función integrable respecto de la medida de Lebesgue-Stieltjes λ_F, entonces notaremos

$$\int_\alpha^\beta f(x)dF(x)$$

para designar la integral $\int_I f d\lambda_F$.

Cuando se consideran funciones integrables en un subconjunto medible E de $\mathbb{R}^N$ su integral se nota por

$$\int_E f(x_1,\ldots,x_N)\, d(x_1,\ldots,x_N)$$

en lugar de $\int_E f d\lambda$. Si F es ahora una función de distribución en $\mathbb{R}^N$ y $f: E\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función integrable respecto de λ_F, entonces $\int_E f d\lambda_F$ se nota por

$$\int_E f(x_1,\ldots,x_N)dF(x_1,\ldots,x_N).$$

Ejemplo 2.2.15.

i. Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida:

- Si $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función medible y existe $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ integrable tal que $|f|\leq g$, entonces f es integrable.
- Si $E\in\Sigma$ con $\mu(E)<\infty$ y $f: E\longrightarrow\mathbb{R}$ es medible y acotada, entonces f es integrable. En particular, toda función continua definida en un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ es integrable (respecto de la medida de Lebesgue). Es obligado advertir, sin embargo, que el cálculo de la integral de una tal función incluso en las situaciones más sencillas es todavía inabordable.

En efecto, para probar la primera afirmación basta tener en cuenta la monotonía de la integral para funciones medibles positivas y la definición de función integrable. Ahora la segunda afirmación es consecuencia de que $|f|\leq M\chi_E$, donde M es una cota de f.

ii. Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida y sea $\phi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ una función medible. Denotemos por μ_ϕ la medida imagen de μ por ϕ. Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow[0,+\infty[$ es una función (Borel) medible, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_\phi = \int_\Omega f\circ\phi d\mu.$$

Además una función (Borel) medible cualquiera $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es integrable respecto de μ_ϕ si, y sólo si, la función $f\circ\phi$ es integrable respecto de μ, en cuyo caso se verifica la identidad

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_\phi = \int_\Omega f\circ\phi d\mu.$$

iii. Sea $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de distribución y sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow[0,+\infty[$ una función (Borel) medible. Para el cálculo de $\int_E f(x)dF(x)$ para cualquier $E\in\mathcal{B}$ se procede como sigue

- para cada punto de discontinuidad a de F notemos ϑ_a al salto de F en a. Se tiene entonces que $\lambda_F(\{a\})=\vartheta_a$ y

$$\int_a^a f(x)dF(x)=\vartheta_a f(a).$$

- en cada intervalo abierto I en el que F es constante se tiene que $\lambda_F(I)=0$ y

$$\int_I f(x)dF(x)=0.$$

- en cada intervalo abierto I en el que F es de clase C^1 se tiene que

$$\int_a^b f(x)F'(x)dx.$$

para cualesquiera $a,b\in I$ con $a<b$. De esta manera la integral de Lebesgue-Stieltjes se convierte en una integral de Lebesgue.

- finalmente para calcular $\int_E f(x)dF(x)$ se descompone E en las partes correspondientes a cada uno de los casos anteriores y se aplica la correspondiente fórmula. Se tiene entonces que

$$\int_E f(x)dF(x)=\sum_{a\in\Delta\cap E}\vartheta_a f(a)+\int_{\mathfrak{I}\cap E} f(x)F'(x)dx,$$

donde Δ denota el conjunto de los punto de discontinuidad de F y $\mathfrak{I}$ denota la unión de todos los intervalos abiertos en los que F es de clase C^1.

Una función (Borel) medible $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es integrable respecto de F si, y sólo si, $\sum_{a\in\Delta}\vartheta_a|f(a)|<\infty$ y fF' es integrable respecto la medida de Lebesgue, en cuyo caso se verifica la identidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x)=\sum_{a\in\Delta}\vartheta_a f(a)+\int_{\mathfrak{I}} f(x)F'(x)dx.$$

2.3. Teoremas de convergencia

Es usual en Análisis Matemático trabajar con funciones que están definidas como límite (en algún sentido) de una sucesión de funciones. Es fundamental, por tanto, ser capaces de deducir la integrabilidad de una tal función a partir del conocimiento de la integrabilidad de las funciones que la aproximan y, en su caso, relacionar el valor de la integral de la función límite con el valor de las integrales de las funciones aproximantes.

En este tema obtendremos los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue. El Teorema de la convergencia monótona 2.3.1 y su primera consecuencia, el Teorema de la convergencia dominada 2.3.6, nos permitirán, en condiciones razonables, intercambiar el límite y la integral. El Lema de Fatou 2.3.7, otra consecuencia del teorema de la convergencia monótona, nos proporcionará un resultado aceptable incluso careciendo de convergencia.

Recordemos que si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida y (f_n) es una sucesión de funciones de Ω en $\mathbb{R}$, entonces decimos que (f_n) *converge casi por doquier* si el conjunto de puntos $\omega \in \Omega$ en los que la sucesión $(f_n(\omega))$ no es convergente es de medida cero. En ese caso, dada una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que (f_n) converge casi por doquier a f si el conjunto

$$\{\omega \in \Omega : \ (f_n(\omega)) \text{ no converge a } f(\omega)\}$$

es de medida cero. El problema natural es si podemos garantizar la integrabilidad de la función f a partir de la integrabilidad de las funciones f_n y más ambiciosamente cabe preguntarse si se verifica la identidad

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Es importante advertir que la respuesta en general es negativa para ambas cuestiones. Ilustramos este hecho en el ejemplo 2.3.9.

2.3.1. Teorema de la convergencia monótona

En 1909 el matemático italiano Beppo Levi publicó un interesante resultado sobre la integración término a término de series de funciones positivas, una versión equivalente de dicho resultado se refiere a la integración término a término de sucesiones crecientes de funciones y es conocida como *Teorema de la convergencia monótona*.

2.3.1 Teorema (de la convergencia monótona)**.** *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea (f_n) una sucesión monótona de funciones integrables en Ω verificando que la sucesión de sus integrales $\left(\int_\Omega f_n d\mu\right)$ está acotada. Entonces (f_n) converge casi por doquier a una función f integrable en Ω y*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que (f_n) es una sucesión creciente de funciones positivas y sea $M > 0$ tal que

$$\int_\Omega f_n \, d\mu \leq M, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como las funciones f_n son medibles, el conjunto $\{\omega \in \Omega : \; \lim f_n(\omega) \in \mathbb{R}\}$ es medible, y por tanto el conjunto

$$E := \{\omega \in \Omega : \; \lim f_n(\omega) = +\infty\}$$

también es medible. Probaremos que $\mu(E) = 0$. Fijemos $K > 0$ y para cada n natural consideremos el conjunto medible

$$E_n = \{\omega \in \Omega : \; f_n(\omega) \geq K\}.$$

Se tiene que

$$K\,\mu(E_n) = \int_{E_n} K \, d\mu \leq \int_{E_n} f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f_n \, d\mu \leq M,$$

y por tanto $\mu(E_n) \leq \dfrac{M}{K}$. Como la sucesión de funciones es creciente, entonces la sucesión de conjuntos (E_n) también lo es, por tanto, por el crecimiento continuo de la medida (Proposición 1.1.2.2.iv) sabemos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) \leq \frac{M}{K}.$$

Como $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces $\mu(E) \leq \dfrac{M}{K}$. De la arbitrariedad de K, obtenemos que $\mu(E) = 0$.

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \omega \in E \\ \lim f_n(\omega) & \text{si} \quad \omega \in E^c \end{cases}.$$

Como $f = \lim f_n \chi_{E^c}$, f es medible y claramente $(f_n) \to f$ c.p.d. Probaremos que

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim \int_\Omega f_n \, d\mu \; (\leq M)$$

(y en consecuencia la función $f = |f|$ será integrable). Fijado $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\{\omega \in \Omega : \; f_n(\omega) \neq (f_n \chi_{E^c})(\omega)\} = E \cap \{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \neq 0\}$$

es de medida cero y $f_n \chi_{E^c} \leq f$. En consecuencia

$$\int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega f_n \chi_{E^c} \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu,$$

y por tanto

$$\lim \int_\Omega f_n \, d\mu \leq \int_\Omega f \, d\mu.$$

Para probar la otra desigualdad, sea s una función simple positiva con $s \leq f$ y sea $0 < \rho < 1$. Para cada natural n definimos el conjunto

$$F_n := \{\omega \in \Omega : \; \rho s(\omega) \leq f_n(\omega)\}.$$

Obtenemos así una sucesión creciente de conjuntos medibles tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \Omega.$$

En efecto, para cada $\omega \in \Omega$ se verifica una de las siguientes afirmaciones

- $f(\omega) = 0$ en cuyo caso $\omega \in F_1$
- $f(\omega) > 0$ y entonces $\rho s(\omega) < f(\omega)$, puesto que $\rho < 1$, y en consecuencia existe un natural n tal que $\omega \in F_n$.

Supuesto que $s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$, para nada n natural se verifica que

$$\rho \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(A_k \cap F_n) \leq \int_\Omega f_n d\mu. \tag{2.2}$$

En efecto,

$$\rho \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mu(A_k \cap F_n) = \sum_{k=1}^{m} \rho \, \alpha_k \, \mu(A_k \cap F_n) = \\ \int_\Omega \rho \, s \, \chi_{F_n} \, d\mu \leq \int_\Omega f_n \, \chi_{F_n} \, d\mu \leq \int_\Omega f_n \, d\mu,$$

donde se han utilizado la definición de F_n y la monotonía de la integral. Para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, $(A_k \cap F_n)$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \big(A_k \cap F_n\big) = A_k$, y por tanto se deduce del crecimiento continuo de la medida μ (Proposición 1.1.2.2.iv) que $\mu(A_k) = \lim \mu(A_k \cap F_n)$. Tomando límite cuando $n \to \infty$ en (2.2) obtenemos en consecuencia que

$$\rho \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(A_k) = \lim \rho \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \, \mu(A_k \cap F_n) \leq \lim \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Por otra parte $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(A_k) = \int_\Omega s d\mu$ y por tanto

$$\rho \int_\Omega s \, d\mu \leq \lim \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Tomando ahora en la desigualdad anterior límite cuando $\rho \to 1$ obtenemos que

$$\int_\Omega s\, d\mu \leq \text{lím} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Considerando por último la arbitrariedad de s, concluimos que

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \text{lím} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Supongamos ahora que (f_n) es una sucesión creciente sin ninguna otra limitación. La sucesión $(f_n - f_1)$ es también creciente y además $f_n - f_1 \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como claramente la sucesión $\left(\int_\Omega (f_n - f_1)\, d\mu\right)$ está mayorada, podemos asegurar que $(f_n - f_1)$ converge casi por doquier a una función integrable g y que

$$\int_\Omega g\, d\mu = \text{lím} \int_\Omega (f_n - f_1)\, d\mu.$$

Definimos entonces $f = g + f_1$, que es integrable, y observamos que (f_n) converge casi por doquier a f y que

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega (g + f_1)\, d\mu = \text{lím} \int_\Omega (f_n - f_1)\, d\mu + \int_\Omega f_1\, d\mu = \text{lím} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Por último, si la sucesión (f_n) es decreciente notemos que basta aplicar lo ya demostrado a la sucesión $(-f_n)$. En efecto, si $(-f_n) \to g$ c.p.d. con g integrable y

$$\int_\Omega g\, d\mu = \text{lím} \int_\Omega (-f_n)\, d\mu,$$

entonces (f_n) converge casi por doquier a $f = -g$ y

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega (-g)\, d\mu = -\int_\Omega g\, d\mu =$$
$$-\,\text{lím} \int_\Omega (-f_n)\, d\mu = -\,\text{lím} \left(-\int_\Omega f_n\, d\mu\right) = \text{lím} \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

□

Es conveniente codificar el siguiente resultado práctico que será utilizado en la prueba del Teorema de la convergencia creciente para funciones medibles positivas 2.3.3.

2.3.2 Corolario. *Sea* (Ω,Σ,μ) *un espacio de medida y sea* (f_n) *una sucesión monótona de funciones integrables en* Ω *verificando que la sucesión de sus integrales* $\left(\int_\Omega f_n d\mu\right)$ *está acotada. Si* $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ *es una función medible tal que* (f_n) *converge a* f *casi por doquier, entonces* f *es integrable en* Ω *y*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim \int_\Omega f_n d\mu.$$

Demostración. Por el Teorema 2.3.1 la sucesión (f_n) converge casi por doquier a una función $g:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ integrable y además

$$\int_\Omega g\, d\mu = \lim \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Comprobemos que $f=g$ c.p.d. Si

$$A=\{\omega\in\Omega:\ g(\omega)=\lim f_n(\omega)\}\ \text{y}\ \ B=\{\omega\in\Omega:\ f(\omega)=\lim f_n(\omega)\}\ ,$$

entonces $A,B\in\Sigma$ y $\mu(A^c)=0=\mu(B^c)$. De la inclusión

$$A\cap B\subset\{\omega\in\Omega: f(\omega)=g(\omega)\},$$

se obtiene que $\{\omega\in\Omega: f(\omega)\neq g(\omega)\}\subset(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$, y el primer conjunto, que es medible, tiene medida cero. Como f y g son medibles, y hemos obtenido que coinciden c.p.d., se sigue que f es integrable y su integral coincide con la de g. □

2.3.3 Corolario. *Sea* (Ω,Σ,μ) *un espacio de medida y sea* (f_n) *una sucesión creciente de funciones medibles positivas en* Ω *que converge casi por doquier a una función medible positiva* f*. Entonces*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim \int_\Omega f_n d\mu.$$

Demostración. La sucesión $\left(\int_\Omega f_n\, d\mu\right)$ es creciente. Si es acotada, el resultado se sigue del Corolario anterior. Si no es acotada, entonces $\lim\ \int_\Omega f_n\, d\mu=\infty$ y al verificarse que

$$\int_\Omega f_n\, d\mu \le \int_\Omega f\, d\mu,\ \forall n\in\mathbb{N},$$

deducimos que también $\int_\Omega f\, d\mu=\infty$. □

La última consecuencia inmediata del Teorema 2.3.1 que resaltamos nos asegura la continuidad absoluta de una medida definida por integración de una función medible positiva.

2.3.4 Corolario. *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida y sea $f:\Omega\longrightarrow[0,+\infty[$ una función medible. Entonces la aplicación $\nu:\Sigma\longrightarrow[0,\infty]$ definida por*

$$\nu(E)=\int_E f d\mu,$$

para todo $E\in\Sigma$, es una medida que además es absolutamente continua respecto de μ, es decir:

$$[E\in\Sigma,\ \mu(E)=0]\Longrightarrow \nu(E)=0.$$

Además si f es integrable, entonces: dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ de manera que $\nu(E)<\varepsilon$ para todo conjunto medible E con $\mu(E)<\delta$.

Demostración. Sea $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$, donde (E_n) es una sucesión de elementos disjuntos de Σ. Obsérvese que

$$f\,\chi_E=f\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}=\sum_{n=1}^{\infty}f\,\chi_{E_n},$$

$$\nu(E)=\int_E f\,d\mu=\int_\Omega f\,\chi_E\,d\mu \quad \text{y}$$

$$\nu(E_n)=\int_{E_n} f\,d\mu=\int_\Omega f\,\chi_{E_n}\,d\mu.$$

En consecuencia

$$\nu(E)=\int_\Omega f\,\chi_E\,d\mu=\int_\Omega \text{lím}\Big(\sum_{k=1}^{n}f\,\chi_{E_k}\Big)d\mu=$$

$$\text{lím}\int_\Omega\Big(\sum_{k=1}^{n}f\chi_{E_k}\Big)d\mu=\text{lím}\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega f\chi_{E_k}d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega f\chi_{E_k}d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(E_k)$$

donde se ha utilizado el Corolario anterior. Así ν es una medida. Por último si $\mu(E)=0$, entonces el apartado iv) de la Proposición 2.2.7 nos asegura que $\int_\Omega f\,\chi_E\,d\mu=0$, esto es, $\nu(E)=0$. Hemos probado que ν es absolutamente continua respecto μ.

Supongamos ahora que f es una función integrable. Sea $\varepsilon>0$. Para cada natural n sea $A_n=\{\omega\in\Omega:\ f(\omega)\le n\}$. Se tiene que $A_n\in\Sigma,\ \forall n\in\mathbb{N}$ y que $(f\chi_{A_n})$ es una sucesión creciente de funciones integrables que converge a f. El Corolario 2.3.2 garantiza que

$$\text{lím}\int_\Omega f\chi_{A_n}d\mu=\int_\Omega f d\mu.$$

Existe entonces $n\in\mathbb{N}$ tal que $\int_\Omega\big(f-f\,\chi_{A_n}\big)\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$. Tomamos $\delta=\frac{\varepsilon}{2n}$; Si $E\in\Sigma$ con $\mu(E)<\delta$, entonces

$$\begin{aligned}\nu(E)&=\int_E f d\mu=\int_E(f-f\chi_{A_n})d\mu+\int_E f\chi_{A_n}d\mu\\ &\le\int_\Omega(f-f\chi_{A_n})d\mu+\int_E n\,d\mu<\frac{\varepsilon}{2}+n\frac{\varepsilon}{2n}=\varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

Observación 2.3.5.

i. La función que f que aparece en el resultado anterior se denomina *función de densidad* de la medida ν respecto de la medida μ. La condición que garantiza la existencia de una tal función de densidad la proporciona el teorema de Radon-Nikodym: *en el caso de que μ sea una medida finita y ν sea una medida absolutamente continua respecto de μ, entonces existe una función integrable $f : \Omega \longrightarrow [0,+\infty[$ de manera que*

$$\nu(E) = \int_\Omega f d\mu$$

para todo $E \in \Sigma$.

ii. Supongamos que ν es la medida introducida en el corolario anterior a partir de la medida μ y la función de densidad f. Entonces la integración respecto de la medida ν está íntimamente relacionada con la integración respecto de la medida original μ. A continuación exponemos esta relación:

   - Si $g : \Omega \longrightarrow [0,+\infty[$ es una función medible, entonces se verifica la identidad
   $$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f d\mu.$$
   - Si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función medible, entonces g es integrable respecto de ν si, y sólo si, la función gf es integrable respecto de μ, en cuyo caso se verifica la siguiente identidad
   $$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f d\mu.$$

iii. La información aportada en el apartado anterior es especialmente útil cuando se trabaja con la medida de Lebesgue-Stieltjes λ_F asociada a una función de distribución F. El problema de integrar respecto de una tal medida se puede convertir en un problema de integración respecto de la medida de Lebesgue siempre que se pueda disponer de una función de densidad, lo cual ocurre cuando λ_F sea absolutamente continua respecto de λ. En $\mathbb{R}$ la continuidad absoluta de λ_F respecto de λ está caracterizada por la continuidad absoluta de la función de distribución F lo cual acontece, en particular, siempre que F sea derivable y la función derivada sea integrable.

2.3.2. Teorema de la convergencia dominada y lema de Fatou

En la práctica no siempre nos encontramos con sucesiones monótonas de funciones, por lo que el Teorema 2.3.1 no puede ser utilizado en tales ocasiones. Afortunadamente, la limitación que impone la monotonía se suprime en el siguiente teorema de convergencia, que a cambio exige la condición de dominación de la sucesión.

La dominación suele acaecer con frecuencia y normalmente no es difícil su comprobación.

2.3.6 Teorema (de la convergencia dominada)**.** *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida y sea* (f_n) *una sucesión de funciones integrables que converge casi por doquier en* Ω *a una función medible* f*. Supongamos que existe una función integrable* g *tal que*

$$|f_n| \leq g \text{ c.p.d.}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces f *es integrable y*

$$\text{lím} \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

En consecuencia

$$\int_\Omega f \, d\mu = \text{lím} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Demostración. Sea $E \in \Sigma$ con $\mu(E^c) = 0$ tal que para cada $\omega \in E$ se verifica que $(f_n(\omega))$ converge a $f(\omega)$ y $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Para cada natural n es $|f_n \chi_E| \leq g\ \chi_E$ y en consecuencia $|f \chi_E| \leq g \chi_E$ con lo que $f \chi_E$ es integrable y, por tanto, f es integrable.

Para cada natural n, sea $g_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g_n(\omega) = \sup\{|f(\omega) - f_k(\omega)| : \ k \geq n\}.$$

Se tiene que $0 \leq g_n \chi_E \leq 2g\chi_E$, con lo que $g_n \chi_E$, que es medible, también es integrable. Como $\left(g_n \chi_E\right)$ es una sucesión decreciente de funciones integrables positivas que converge a cero, el Corolario 2.3.2 garantiza que

$$\text{lím} \int_\Omega g_n \chi_E d\mu = 0.$$

Como $|f - f_n|\chi_E \leq g_n \chi_E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$0 \leq \int_\Omega |f - f_n| d\mu = \int_\Omega |f - f_n| \chi_E d\mu \leq \int_\Omega g_n \chi_E d\mu, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y por tanto concluimos que

$$\text{lím} \int_\Omega |f - f_n| d\mu = 0.$$

Finalmente, al verificarse

$$\left| \int_\Omega f d\mu - \int_\Omega f_n d\mu \right| = \left| \int_\Omega (f - f_n) d\mu \right| \leq \int_\Omega |f - f_n| d\mu,$$

se tiene en consecuencia que

$$\int_\Omega f \, d\mu = \text{lím} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

□

Mostraremos seguidamente que, incluso careciendo de convergencia puntual de la sucesión de funciones, podemos conseguir un resultado del mismo tipo.

2.3.7 Teorema (lema de Fatou)**.** *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida y sea* (f_n) *una sucesión de funciones medibles y positivas en* Ω *tal que*

$$\liminf \int_\Omega f_n \, d\mu < \infty.$$

Entonces, existe una función f *integrable en* Ω *tal que*

$$\liminf f_n = f \text{ c.p.d. } y \quad \int_\Omega f \, d\mu \leq \liminf \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Demostración. Para cada natural n, consideremos la función $g_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_n(\omega) = \inf\{f_k(\omega) : \; k \geq n\}.$$

Se tiene que $0 \leq g_n \leq f_k$, para $k \geq n$, luego $0 \leq \int_\Omega g_n \, d\mu \leq \int_\Omega f_k \, d\mu$, para $k \geq n$, y en consecuencia $0 \leq \int_\Omega g_n \, d\mu \leq \inf\left\{\int_\Omega f_k \, d\mu : \; k \geq n\right\}$ y, por tanto,

$$0 \leq \int_\Omega g_n \, d\mu \leq \liminf \int_\Omega f_n \, d\mu < \infty.$$

Como la sucesión (g_n) es creciente, el Teorema 2.3.1 nos asegura que (g_n) converge casi por doquier a una función integrable f y que $\int_\Omega f d\mu = \lim \int_\Omega g_n d\mu$. Hemos probado que

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \liminf \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

$\square$

2.3.3. Teorema de la convergencia absoluta

Con frecuencia nos encontramos con el problema de integrar funciones definidas como la suma de una serie de funciones (piénsese por ejemplo en las funciones definidas por una serie de potencias). La conjunción de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.6 nos permiten a continuación establecer un procedimiento muy natural para resolver este problema de integración.

2.3.8 Teorema (de la convergencia absoluta)**.** *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida y sea* $\sum f_n$ *una serie de funciones integrables en* Ω*. Supongamos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Entonces la serie $\sum f_n$ converge absolutamente casi por doquier, existe una función f integrable en Ω tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ casi por doquier y además

$$\lim \int_{\Omega} \left| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right| d\mu = 0.$$

En consecuencia

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|$. (G_n) es una sucesión creciente de funciones integrables tal que

$$\int_{\Omega} G_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega} |f_k| \, d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_n| \, d\mu < \infty.$$

El Teorema 2.3.1 garantiza, en consecuencia, la existencia de una función integrable G tal que (G_n) converge casi por doquier a G. Este hecho nos permite afirmar que la serie $\sum f_n$ converge absolutamente casi por doquier, esto es el conjunto medible

$$E = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\omega)| < \infty \right\}$$

verifica que $\mu(E^c) = 0$. Como toda serie absolutamente convergente es convergente podemos definir la función medible $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(\omega) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega) & \text{si} \quad \omega \in E \\ 0 & \text{si} \quad \omega \in E^c \end{cases},$$

es decir,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \chi_E.$$

Como el conjunto medible $\left\{ \omega \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega) \neq f(\omega) \right\}$ es un subconjunto de E^c, se sigue que es de medida cero, y en consecuencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \text{ c.p.d.}$$

Veamos que la función f cumple las condiciones del teorema. Para ello consideremos la sucesión (F_n) de funciones integrables en Ω definida por

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Obsérvese que $(F_n) \to f$ c.p.d. y que es fácil comprobar que $|F_n| \leq G$ c.p.d., $\forall n \in \mathbb{N}$. El Teorema 2.3.6 nos permite concluir que f es integrable y que

$$\lim \int_\Omega |f - F_n| d\mu = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f d\mu &= \lim \int_\Omega F_n d\mu = \lim \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) d\mu \\ &= \lim \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega f_k d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n d\mu\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 2.3.9.

i. Se considera la sucesión de funciones (f_n) en $]0,1[$ definida por

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{1+n^2x^2} \quad \forall x \in]0,1[, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Obsérvese que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in]0,1[$$

y que, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es integrable con

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{n}}{1+nx^2} dx = \Big[\arctan(\sqrt{n}x)\Big]_0^1 = \arctan(\sqrt{n}).$$

En consecuencia

$$\begin{gathered}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \arctan(\sqrt{n}) = \frac{\pi}{2} \\ \nparallel \\ \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0dx = 0.\end{gathered}$$

ii. Se considera la sucesión de funciones (f_n) en $]0,1[$ definida por

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \forall x \in]0,1[, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{x^2} \quad \forall x \in]0,1[,$$

- la sucesión $(f_n(x))$ es creciente para cada $x \in]0,1[$
- cada una de las funciones f_n es integrable en $]0,1[$
- la sucesión $(\int_0^1 f_n(x)dx)$ está acotada pues

$$\int_0^1 f_n(x)dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e dx = e \ \forall n \in \mathbb{N}$$

En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^{x^2} dx$$

iii. Se considera la sucesión de funciones (f_n) en $]0,1[$ definida por

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{1+n^2x^2} \ \ \forall x \in]0,1[\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ \ \forall x \in]0,1[$$

- ahora la sucesión (f_n) no es monótona
- $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,1[$ y la función $\frac{1}{2}$ es integrable en $]0,1[$.

En consecuencia

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1+nx}{1+n^2x^2} dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{1+nx}{1+n^2x^2} dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

Es importante destacar en este punto que la dominación por una constante, como la llevada a cabo en el presente ejemplo, resulta efectiva siempre que estemos trabajando en un espacio de medida finita. En otro caso las funciones constantes no son integrables y en consecuencia la dominación por una tal función es completamente inútil.

iv Se considera la serie de funciones

$$\sum \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}.$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = e^{-x^2} \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La serie

$$\sum \int_0^2 \left| \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \right| dx = \sum \int_0^2 \frac{1}{n!} x^{2n} dx =$$

$$\sum \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \right]_0^2 = \sum \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

es convergente y en consecuencia

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

2.3.4. Integrales dependientes de un parámetro

2.3.10 Teorema. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ de extremos α y β con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ y sea $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función verificando las siguientes propiedades:*

i. *$\forall x \in I$, la función $\omega \mapsto f(x, \omega)$ es integrable en Ω.*

ii. *$\forall \omega \in \Omega$, la función $x \mapsto f(x, \omega)$ tiene límite en el punto a ($\alpha \leq a \leq \beta$).*

iii. *Existe $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que*

$$|f(x, \omega)| \leq g(\omega), \ \forall x \in I, \ \forall \omega \in \Omega \ .$$

Entonces la función

$$x \mapsto \int_\Omega f(x, \omega) d\mu$$

tiene límite en el punto a, la función

$$\omega \mapsto \lim_{x \to a} f(x, \omega)$$

es integrable y

$$\lim_{x \to a} \int_\Omega f(x, \omega) d\mu = \int_\Omega \lim_{x \to a} f(x, \omega) d\mu.$$

Demostración. Sea (x_n) una sucesión en I cuyo límite es a. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función $\varphi_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi_n(\omega) = f(x_n, \omega)$ $\forall \omega \in \Omega$. Definamos además $\varphi_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_0(\omega) = \lim_{x \to a} f(x, \omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Sabemos que (φ_n) es una sucesión de funciones integrables en Ω que converge a φ_0. Además $|\varphi_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia el teorema de la convergencia dominada (Teorema 2.3.6) nos permite concluir que φ_0 es integrable en Ω y que

$$\int_\Omega \varphi_0 d\mu = \lim \int_\Omega \varphi_n d\mu.$$

Lo anterior demuestra el teorema. □

2.3.11 Corolario. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función verificando las siguientes condiciones:*

i. *$\forall x \in I$, la función $\omega \to f(x, \omega)$ es integrable en Ω.*

ii. $\forall \omega \in \Omega$, *la función* $x \to f(x,\omega)$ *es continua en* I.

iii. Existe $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable tal que*

$$|f(x,\omega)| \leq g(\omega), \ \forall x \in I, \ \forall \omega \in \Omega \ .$$

Entonces la función $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\varphi(x) \int_{\Omega} f(x,\omega) d\mu \ \forall x \in I$$

es continua.

Demostración. Sea $a \in I$. En virtud del teorema 2.3.10 y la continuidad de la función $x \mapsto f(x,\omega)$ (para cada $\omega \in \Omega$) tenemos que

$$\lim_{x \to a} \int_{\Omega} f(x,\omega) d\mu = \int_{\Omega} \lim_{x \to a} f(x,\omega) d\mu = \int_{\Omega} f(a,\omega) d\mu.$$

□

2.3.12 Corolario. *Sea* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida, sea* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo y sea* $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función verificando las siguientes condiciones:*

i. $\forall x \in I$, *la función* $\omega \mapsto f(x,\omega)$ *es integrable en* Ω.

ii. $\forall \omega \in \Omega$, *la función* $x \mapsto f(x,\omega)$ *es derivable en* I.

iii. Existe $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable tal que*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega) \right| \leq g(\omega), \ \forall x \in I, \ \forall \omega \in \Omega \ .$$

Entonces la función $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} f(x, \omega d\mu \ \forall x \in I$$

es derivable en I *con*

$$\varphi'(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x}(x,\omega) \ d\mu, \ \forall x \in I.$$

Demostración. Sea $a \in I$. Para cada $x \in I \setminus \{a\}$ y cada $\omega \in \Omega$, el teorema del valor medio garantiza la existencia de un punto $c_{x,\omega}$ del intervalo abierto de extremos a y x tal que

$$\left| \frac{f(x,\omega) - f(a,\omega)}{x-a} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(c_{x,\omega}, \omega) \right| .$$

La hipótesis iii nos asegura ahora que

$$\left|\frac{f(x,\omega)-f(a,\omega)}{x-a}\right| \leq g(\omega),\ \forall\omega\in\Omega.$$

El teorema 2.3.10 asegura entonces que

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\int_\Omega \frac{f(x,\omega)-f(a,\omega)}{x-a}d\mu = \int_\Omega \lim_{x\to a}\frac{f(x,\omega)-f(a,\omega)}{x-a}d\mu = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,a)d\mu.$$

□

Ejemplo 2.3.13.

i. Se considera la función $\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \int_0^1 \sqrt{x}e^{-tx}dx\ \forall t\in]0,+\infty[.$$

- para cada $x\in]0,1[$ la función $t\mapsto\sqrt{x}e^{-tx}$ es continua
- para cada $x\in]0,1[$ se tiene que

$$\left|\sqrt{x}e^{-tx}\right| \leq \sqrt{x}e^{-0x} = \sqrt{x}\ \forall t\in]0,+\infty[.$$

- $\sqrt{x}$ es integrable en $]0,1[$ pues $\int_0^1\sqrt{x}dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.
- Por el corolario 2.3.11 obtenemos que φ es continua en $]0,+\infty[$.

Por otra parte tenemos que

- para cada $x\in]0,1[$ la función $t\mapsto\sqrt{x}e^{-tx}$ es derivable con derivada $t\mapsto -\sqrt{x}xe^{-tx}$
- para cada $x\in]0,1[$ se tiene que

$$\left|-\sqrt{x}xe^{-tx}\right| \leq \sqrt{x}xe^{-0x} = \sqrt{x}x\ \forall t\in]0,+\infty[$$

- $\sqrt{x}x$ es integrable en $]0,1[$ pues $\int_0^1 x^{3/2}dx = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$.
- Por el corolario 2.3.12 obtenemos que φ es derivable en $]0,+\infty[$ con derivada

$$\varphi'(t) = \int_0^1 -x^{3/2}e^{-tx}dx\ \forall t\in]0,+\infty[.$$

ii. Seguidamente mostramos la manera de proceder cuando no se obtiene automáticamente una dominación integrable como pasaba en el ejemplo anterior.

Se considera la función $\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-tx}dx \; \forall t \in]0,+\infty[.$$

- para cada $x \in]0,+\infty[$ la función $t \mapsto \sqrt{x}e^{-tx}$ es continua
- para cada $x \in]0,+\infty[$ se tiene que

$$\left|\sqrt{x}e^{-tx}\right| \leq \sqrt{x}e^{-0x} = \sqrt{x} \; \forall t \in]0,+\infty[$$

  y esta es la mejor dominación posible.

  - $\sqrt{x}$ no es integrable en $]0,+\infty[$ pues $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^{+\infty} = \infty$.
  - Se fija $0 < \alpha$ y movemos t sólo en $]\alpha,+\infty[$. Entonces

$$\left|\sqrt{x}e^{-tx}\right| \leq \sqrt{x}e^{-\alpha x} \; \forall t \in]\alpha,+\infty[.$$

    Esta dominación si que es integrable.
  - Por el corolario 2.3.11 obtenemos que φ es continua en $]\alpha,+\infty[$. Como $\alpha > 0$ es arbitrario concluimos que φ es continua en $]0,+\infty[$.

Para el estudio de la derivabilidad se procede de manera similar.

- para cada $x \in]0,+\infty[$ la función $t \mapsto \sqrt{x}e^{-tx}$ es derivable con derivada $t \mapsto -\sqrt{x}xe^{-tx}$
- para cada $x \in]0,+\infty[$ se tiene que

$$\left|-\sqrt{x}xe^{-tx}\right| \leq \sqrt{x}xe^{-0x} = \sqrt{x}x \; \forall t \in]0,+\infty[$$

  y esta es nuevamente la mejor dominación posible.

  - $\sqrt{x}x$ no es integrable en $]0,+\infty[$ pues $\int_0^{+\infty} x^{3/2}dx = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right]_0^{+\infty} = \infty$.
  - Se fija $0 < \alpha$ y movemos t sólo en $]\alpha,+\infty[$. Entonces

$$\left|x^{3/2}e^{-tx}\right| \leq x^{3/2}e^{-\alpha x} \; \forall t \in]\alpha,+\infty[.$$

    Esta dominación si que es integrable.
  - Por el corolario 2.3.12 obtenemos que φ es derivable en $]\alpha,+\infty[$. Como $\alpha > 0$ es arbitrario concluimos que φ es derivable en $]0,+\infty[$ con derivada

$$\varphi'(t) = \int_0^{+\infty} -x^{3/2}e^{-tx}dx \; \forall t \in]0,+\infty[.$$

Como

$$\varphi'(t) = \int_0^{+\infty} -x^{3/2}e^{-tx}dx \ < \ 0 \ \ \forall t \in]0, +\infty[$$

podemos asegurar que φ es estrictamente decreciente. En consecuencia φ tiene límite en 0 y en $+\infty$. Desgraciadamente no disponemos de una dominación integrable para calcular dichos límites. Sin embargo, para estudiar el comportamiento de φ en 0 podemos hacer uso del lema de Fatou en la siguiente forma

$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} \int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-tx}dx \geq \int_0^{+\infty} \lim_{t\to 0} \sqrt{x}e^{-tx}dx = \int_0^{+\infty} \sqrt{x}dx = +\infty$$

y por tanto $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = 0$. Para calcular el límite en $+\infty$ observemos que

$$\sqrt{x}e^{-tx} \leq \sqrt{x}e^{-x} \ \forall t \in]1, +\infty[, \ \forall x \in]0, +\infty[$$

y esta dominación si que es integrable. En consecuencia

$$\lim_{t\to +\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to +\infty, t>1} \varphi(t) = \int_0^{+\infty} \lim_{t\to +\infty, t>1} \sqrt{x}e^{-tx}dx = \int_0^{+\infty} 0dx = 0.$$

2.4. Ejercicios

1. Sea Ω un conjunto no vacío, sea $\omega \in \Omega$ y sea δ_ω la medida de Dirac concentrada en ω. Demostrar que cualquier función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable con

$$\int_\Omega f d\delta_\omega = f(\omega).$$

2. Sea μ la medida contadora en $\mathbb{N}$. Demostrar que una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable si, y sólo si,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty,$$

en cuyo caso se verifica

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

3. Estudiar la integral asociada a la medida imagen en las siguientes situaciones:

i. La medida imagen de la medida de Lebesgue por la función parte entera $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

ii. La medida imagen de una medida cualquiera por una función constante.

iii. La medida imagen de una medida cualquiera por la función característica de un conjunto medible.

4. Estudiar la integral asociada a la medida de Lebesgue-Stieltjes respecto de las siguientes funciones de distribución:

i. La función de Heaviside $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que está definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x. \end{cases}$$

ii. . La función parte entera $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

iii. La función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

iv. La función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

v. La función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 5 & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

vi. La función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ x+2 & \text{si} \quad 2 \leq x. \end{cases}$$

vii. $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ x+2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3, \\ 5 & \text{si} \quad 3 \leq x. \end{cases}$$

viii. $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ x+2 & \text{si} \quad 2 \leq x < 3, \\ E(x)+5 & \text{si} \quad 3 \leq x. \end{cases}$$

ix. $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 3 & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

x. $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1+x & \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ 5 & \text{si} \quad 2 \leq x. \end{cases}$$

xi. $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0, \\ 1+x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ 3 & \text{si} \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

xii. $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = x + E(x) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. Sea (ω_n) una sucesión de números reales con $\omega_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se define la medida μ sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ por $\mu(\{n\}) = \omega_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable si, y sólo si,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|\omega_n < \infty,$$

en cuyo caso se verifica

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\omega_n.$$

6. Se considera el espacio de medida (Ω, Σ, μ), siendo

$$\Omega = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\},$$

$$\Sigma = \Big\{\emptyset, \Omega, \{\clubsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}\Big\}$$

y

$$\mu\big(\emptyset\big) = 0,\ \mu\big(\Omega\big) = 1,\ \mu\big(\{\clubsuit\}\big) = \frac{1}{4} \ \text{ y } \mu\big(\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}\big) = \frac{3}{4}.$$

i. Probar que la función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\clubsuit) = f(\diamondsuit) = 0,\ f(\heartsuit) = f(\spadesuit) = 1$$

no es medible.

ii. Probar que la función $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\clubsuit) = -1,\ f(\diamondsuit) = f(\heartsuit) = g(\spadesuit) = 1$$

es integrable. Calcular las integrales

$$\int_{\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}} g d\mu$$

y

$$\int_{\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}} g d\mu.$$

7. Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida con $\mu(\Omega) < \infty$ y sea (f_n) una sucesión de funciones medibles en Ω que converge a una función f. Supongamos que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que f es integrable y que

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

8. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

para cada una de las siguientes sucesiones de funciones:

i. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x}$ $\forall x \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii. $f_n(x) = \frac{1}{n}\ln(x+n)e^{-x}\cos(x)$ $\forall x \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iii. $f_n(x) = \dfrac{1+nx}{(1+x)^n}$ $\forall x \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iv. $f_n(x) = \dfrac{nx\ln(x)}{1+n^2x}$ $\forall x \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

v. $f_n(x) = \dfrac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}$ $\forall x \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

vi. $f_n(x) = \dfrac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$ $\forall x \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

vii. $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{n}\right)$ $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

viii. $f_n(x) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}}$ $\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

9. Probar las siguientes identidades:

i. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+e^x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

ii. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

iii. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^\alpha}{1-x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2}$ $\forall \alpha > -1$.

iv. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+e^{-\beta x}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha+\beta n}\ \forall \alpha,\beta > 0.$

v. $\displaystyle\frac{xe^{-\alpha x}}{1+e^{-\beta x}}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+\beta n)^2}\ \forall \alpha,\beta > 0.$

10. Sea $\Gamma : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx.$$

Probar que

i. Γ es derivable y dar una expresión de su derivada.

ii. $\lim\limits_{t\to 0}\Gamma(t) = +\infty$.

11. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

i. $\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-tx}}{x}dx,\ \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

ii. $\varphi :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \int_0^{\pi} \ln(1+t\cos x)dx,\ \forall t \in]-1,1[.$$

iii. $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+x^2}dx\ \forall t \in [0,+\infty[.$$

Calcular $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)$.

iv. $\varphi : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+x^2}dx\ \forall t \in [0,+\infty[.$$

v. $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{1+x^2}dx\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

vi. $\varphi :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-tx} dx \ \forall t \in]0,+\infty[.$$

Calcular $\lim_{t\to 0} \varphi(t)$ y $\lim_{x\to +\infty} \varphi(t)$.

12. Calcular

1.
$$\lim_{t\to -1} \int_0^1 x^t e^{-x^2} dx \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to +\infty} \int_0^1 x^t e^{-x^2} dx.$$

2.
$$\lim_{t\to -1} \int_0^1 x^t e^x dx \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to +\infty} \int_0^1 x^t e^x dx.$$

CAPÍTULO 3

La integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

El objetivo de este capítulo es el estudio de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, esto es, la integral asociada al espacio de medida $(\mathbb{R}^N, \mathcal{M}, \lambda)$. Tras el asentamiento en las lecciones precedentes de los pilares básicos que sostienen la teoría de la integración, podemos ahora abordar la cuestión fundamental para nosotros: proporcionar métodos que permitan reconocer cuando una función $f : E \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable y, en caso afirmativo, calcular su integral.

Es importante tener presente que el problema de integración planteado contiene dos cuestiones distintas: una es la integrabilidad de la función (hasta ahora sabemos que son integrables las funciones nulas c.p.d., las combinaciones lineales de funciones características de conjuntos de medida finita y las funciones continuas de soporte compacto) y otra es calcular, supuesto que la función sea integrable, el valor de su integral. En este sentido debemos advertir que presentamos tres tipos de técnicas de integración:

- Métodos que proporcionan la integrabilidad de f aunque no el valor de la integral.
- Métodos que proporcionan la integrabilidad de f y el valor de su integral.
- Métodos que proporcionan el valor de la integral, supuesto que la función sea integrable.

El lector tendrá cuidado en lo sucesivo de advertir con precisión la información que cada resultado proporciona al respecto.

Dividimos la presente lección en dos secciones:

I. **Integrales simples**, esto es, integrales de funciones de una única variable real. Nuestro objetivo será la integración de funciones definidas en un intervalo I de $\mathbb{R}$.

II. **Integrales múltiples**, es decir, integrales de funciones de varias variables reales. En esta sección abordaremos el problema de la integración de funciones en un subconjunto medible $E \subset \mathbb{R}^N$.

3.1. Integrales simples

3.1.1. Acotación local e integrabilidad local

Antes de abordar el problema de la integrabilidad de funciones definidas en intervalos de $\mathbb{R}$ es conveniente introducir la siguiente debilitación de dicho concepto.

3.1.1 Definición (Acotación local e integrabilidad local)**.** Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces f es *localmente acotada* si es acotada en cada intervalo compacto contenido en I. f es *localmente integrable* si es integrable en cada intervalo compacto contenido en I

Es claro que toda función medible localmente acotada es localmente integrable. En particular, toda función continua en I es localmente integrable.

También es cierto que toda función localmente integrable es medible. En efecto, si $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ son los extremos de I y (a_n) y (b_n) son sucesiones de números reales de I con $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ tales que $\lim a_n = \alpha$ y $\lim b_n = \beta$, entonces $f\chi_{[a_n,b_n]} \to f$ c.p.d. y es claro que f es medible, ya que cada función $f\chi_{[a_n,b_n]}$ es medible por ser integrable.

Es importante observar así mismo que, como consecuencia de ser $\chi_I = \chi_{]\alpha,\beta[}$ c.p.d., una tal función f es integrable en I si, y sólo si, es integrable en $]\alpha,\beta[$, en cuyo caso se tiene que

$$\int_I f \, d\lambda = \int_{]\alpha,\beta[} f \, d\lambda,$$

hecho que nos permite notar cualquiera de las integrales que aparecen en la igualdad anterior por

$$\int_\alpha^\beta f(x) \, dx$$

(si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces I puede ser cerrado o semicerrado). Es usual definir

$$\int_\beta^\alpha f(x) \, dx := -\int_\alpha^\beta f(x) \, dx.$$

El hecho antes comentado de que una función definida en un intervalo de $\mathbb{R}$ es integrable en éste si, y sólo si, lo es en su interior nos permite limitarnos al estudio de la integración de funciones en intervalos de $\mathbb{R}$ de la forma $]\alpha,\beta[$ con $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

3.1.2 Proposición (Aditividad respecto del intervalo de integración)**.**

i. *Sea* $f:]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ *una función y sea* $\gamma \in]\alpha,\beta[$. *Entonces* f *es integrable en* $]\alpha,\beta[$ *si, y sólo si, es integrable en* $]\alpha,\gamma[$ *y en* $]\gamma,\beta[$, *en cuyo caso se verifica la identidad*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx.$$

ii. *Sean* $\alpha,\beta,\gamma \in [-\infty,+\infty]$ *y sea* $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *una función integrable, donde* $a = \min\{\alpha,\beta,\gamma\}$ *y* $b = \max\{\alpha,\beta,\gamma\}$. *Entonces*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx.$$

Demostración. i. Es un caso particular de la Proposición 2.2.14.

ii. La fórmula que se pretende demostrar es equivalente a

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\alpha f(x)\,dx = 0, \qquad (*)$$

fórmula que es trivial si dos de los tres puntos que aparecen en ella coinciden, pues en tal caso se reduce a

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0.$$

Además, si se permutan de cualquier forma los puntos α,β y γ, el primer miembro de la fórmula $(*)$ permanece ó queda multiplicado por -1. Ello permite suponer que $\alpha < \gamma < \beta$ cuyo caso la fórmula es cierta por el apartado i). □

3.1.2. Regla de Barrow

Uno de los principales métodos de integración para funciones de una variable real es la regla de Barrow, que hace uso de una primitiva de la función original para estudiar la integrabilidad de esta función y calcular su integral. Resaltamos que las funciones que habitualmente se presentan en la práctica son localmente acotadas. Mostraremos seguidamente que la integral proporciona un método de construcción de primitivas, al menos para funciones continuas, y que toda función definida en un intervalo que admita primitiva es medible.

3.1.3 Proposición. *Sea $f:]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable y sea $a \in]\alpha,\beta[$. Entonces la función $F:]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

para todo $x \in]\alpha,\beta[$, es derivable en cada punto $x \in]\alpha,\beta[$ donde f sea continua y además $F'(x) = f(x)$.

Demostración. Supongamos que f es continua en un punto $x \in]\alpha,\beta[$. Dado $\varepsilon > 0$, la continuidad de f en x nos asegura que existe $\delta > 0$ tal que

$$(y \in]\alpha,\beta[,\ \ 0 < |y-x| < \delta) \Rightarrow \ \ |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Para un tal y se verifica

$$\left|\frac{F(y)-F(x)}{y-x} - f(x)\right| = \frac{1}{|y-x|}\left|\int_a^y f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt - (y-x)f(x)\right| =$$

$$\frac{1}{|y-x|}\left|\int_x^y f(t)dt - (y-x)f(x)\right| = \frac{1}{|y-x|}\left|\int_x^y f(t)\ dt - \int_x^y f(x)\ dt\right| =$$

$$\frac{1}{|y-x|}\left|\int_x^y \Big(f(t)-f(x)\Big)\ dt\right| \leq \frac{1}{|y-x|}\left|\int_x^y |f(t)-f(x)|\ dt\right| \leq \frac{1}{|y-x|}\left|\int_x^y \varepsilon\ dt\right| = \varepsilon,$$

donde se ha utilizado la proposición anterior. Hemos probado que la función F es derivable en x y que $F'(x) = f(x)$. $\square$

Observación 3.1.4.

i. La función F definida en el resultado anterior se denomina *integral indefinida* de f.

ii. Recordemos que una función $f:]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ admite *primitiva* si existe una función $F:]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in]\alpha,\beta[$. Se dice también que F es una primitiva de f. Cualquier función que se obtenga sumando a F una constante es también una primitiva de f y de esta forma se obtienen todas las primitivas de f.

3.1.5 Lema. *Si $f:]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite una primitiva F en $]\alpha,\beta[$, entonces f es medible. Si además, f es localmente acotada, entonces f es localmente integrable y se verifica para cada $[a,b] \subset]\alpha,\beta[$ que*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Demostración. Fijemos $[a,b] \subset]\alpha,\beta[$. Veamos que $f_{|[a,b]}$ es medible. En efecto sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $b + \frac{1}{m} < \beta$. Para n natural con $n \geq m$ se verifica, al ser G una primitiva de f, que

$$\frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}} \to f(x), \ \forall x \in [a,b]$$

de donde se deduce que $f_{|[a,b]}$ es medible por ser límite de una sucesión de funciones continuas. Sean ahora (a_n) y (b_n) sucesiones en $]\alpha,\beta[$ con $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_n) \searrow \alpha$ y $(b_n) \nearrow \beta$, entonces $f\chi_{[a_n,b_n]} \to f$ lo que nos permite concluir que f es medible por ser límite de una sucesión de funciones medibles.

Supongamos ahora que f es además localmente acotada. En ese caso, por ser f medible, sabemos que es localmente integrable. Sea $[a,b]$ un intervalo acotado contenido en $]\alpha,\beta[$ y tómese $m \in \mathbb{N}$ tal que $b + \frac{1}{m} < \beta$. Haciendo uso del Teorema del valor medio obtenemos que para cada $x \in [a,b]$ y cada natural n con $n \geq m$ existe $\vartheta_n \in]0,1[$ tal que

$$F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) = f\left(x + \frac{\vartheta_n}{n}\right)\frac{1}{n}$$

y, por tanto, la función

$$\left|\frac{F(x+\frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}\right| = \left|f\left(x + \frac{\vartheta_n}{n}\right)\right| \leq \left\|f\chi_{[a,b+\frac{1}{m}]}\right\|_\infty$$

es integrable en $[a,b]$. En consecuencia el teorema de la convergencia dominada nos asegura que

$$\text{lím} \int_a^b n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ahora bien

$$\int_a^b n\left[F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right]\, dx =$$

$$n\int_a^b F\left(x + \frac{1}{n}\right)\, dx - n\int_a^b F(x)\, dx = n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} F(x)\, dx - n\int_a^b F(x)\, dx =$$

$$= n\int_b^{b+\frac{1}{n}} F(x)\, dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)\, dx \longrightarrow F(b) - F(a),$$

donde se ha usado la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue y la Proposición 3.1.3 aplicada a la función continua F. Así hemos probado que

$$[a,b] \subset]\alpha,\beta[\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

$\square$

3.1.6 Proposición (Regla de Barrow)**.**

i. *Sea $f :]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente acotada e integrable que admite primitiva F en $]\alpha,\beta[$. Entonces existen $\lim\limits_{x\to\alpha} F(x)$ y $\lim\limits_{x\to\beta} F(x)$, ambos son finitos y además*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{x\to\beta} F(x) - \lim_{x\to\alpha} F(x).$$

ii. *Sea $f :]\alpha,\beta[\longrightarrow [0,+\infty[$ una función localmente acotada que admite primitiva F en $]\alpha,\beta[$. Entonces f es medible y*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{x\to\beta} F(x) - \lim_{x\to\alpha} F(x),$$

donde los límites pueden ser $\pm\infty$. En consecuencia f es integrable si, y sólo si, el segundo miembro de la igualdad anterior es real, o equivalentemente $\lim\limits_{x\to\alpha} F(x),\ \lim\limits_{x\to\beta} F(x) \in \mathbb{R}$.

Demostración. i. Para probar que existe $\lim\limits_{x\to\beta} F(x) \in \mathbb{R}$, consideremos un punto $c \in]\alpha,\beta[$ y una sucesión (b_n) de números reales del intervalo $[c,\beta[$ tal que $\lim b_n = \beta$. Se tiene claramente que $\lim f\chi_{[c,b_n]} = f\chi_{[c,\beta[}$, y también que

$$|f\chi_{[c,b_n]}| \le |f| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $|f|$ es integrable el teorema de la convergencia dominada 2.3.6 nos asegura que

$$\lim \int_c^{b_n} f(x)\,dx = \int_c^\beta f(x)\,dx.$$

Por otra parte, el lema anterior nos garantiza que

$$\int_c^{b_n} f(x)\,dx = F(b_n) - F(c)$$

y, por tanto, $(F(b_n))$ es convergente (en $\mathbb{R}$) y

$$\int_c^\beta f(x)\,dx = \lim F(b_n) - F(c).$$

Dada la arbitrariedad de (b_n), se verifica que

$$\lim_{x\to\beta} F(x) = \lim F(b_n).$$

Hemos probado que

$$\int_c^\beta f(x)\,dx = \lim_{x\to\beta} F(x) - F(c).$$

Análogamente se prueba que

$$\int_{\alpha}^{c} f(x)\, dx = F(c) - \lim_{x\to\alpha} F(x).$$

Finalmente la Proposición 3.1.2 nos permite concluir que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \lim_{x\to\beta} F(x) - \lim_{x\to\alpha} F(x).$$

ii. En este apartado, como $F'(x) = f(x) \geq 0,\ \ \forall x \in]\alpha,\beta[$, la función F es creciente y en consecuencia está asegurada la existencia de los límites de F en α y β (pudiendo ser $\pm\infty$). El lema anterior nos garantiza que f es localmente integrable (luego medible) y que

$$[a,b] \subset]\alpha,\beta[\ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones en $]\alpha,\beta[$ tales que $\lim a_n = \alpha$ y $\lim b_n = \beta$. Entonces $\lim f\chi_{[a_n,b_n]} = f$. El Teorema de la convergencia monótona para funciones medibles positivas 2.3.3 nos asegura que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx = \lim \int_{a_n}^{b_n} f(x)\, dx = \lim\big(F(b_n) - F(a_n)\big) =$$

$$= \lim F(b_n) - \lim F(a_n) = \lim_{x\to\beta} F(x) - \lim_{x\to\alpha} F(x).$$

Obsérvese finalmente que al ser F creciente, se tiene $\lim_{x\to\alpha} F(x) < +\infty$ y tiene sentido la expresión

$$\lim_{x\to\beta} F(x) - \lim_{x\to\alpha} F(x) \in [0,+\infty].$$

Es claro además que f es integrable si, y sólo si, la expresión anterior es finita. □

Observación 3.1.7.

i. Es importante tener presente que una función $f :]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ que admita una primitiva F en $]\alpha,\beta[$ y tal que existen $\lim\limits_{x\to\beta} F(x) \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} F(x) \in \mathbb{R}$ puede no ser integrable.

ii. Los dos apartados de la regla de Barrow siguen siendo válidos sin exigir la acotación local de la función (en ii hay que exigir en tal caso la medibilidad). Esta generalización se probará en el capítulo dedicado al Teorema fundamental del cálculo.

La regla de Barrow nos permite estudiar la integrabilidad y calcular la integral en el caso de que dispongamos de una primitiva de la función problema. Es conveniente en consecuencia reconocer aquellas funciones cuya primitiva se puede obtener de manera inmediata. Estas son las que tradicionalmente se conocen como integrales inmediatas. En el Apéndice 3.3.1 de esta sección incluimos algunas tablas donde recopilamos la más básicas de estas integrales inmediatas.

Ahora la regla de Barrow nos permite discutir la integrabilidad y calcular la integral en su caso de las funciones potenciales.

Ejemplo 3.1.8. Para cada $\rho \in \mathbb{R}$ sea $f_\rho : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_\rho(x) = x^\rho, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Entonces se verifica:

i. f_ρ no es integrable en $]0,+\infty[$ para ningún valor de $\rho \in \mathbb{R}$.

ii. Si $\beta \in \mathbb{R}^+$, entonces f_ρ es integrable en $]0,\beta[$ si y sólo si, $\rho > -1$, siendo

$$\int_0^\beta x^\rho \, dx = \frac{\beta^{\rho+1}}{\rho+1}$$

y, en particular,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

iii. Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, entonces f_ρ es integrable en $]\alpha,+\infty[$ si, y sólo si, $\rho < -1$, y en tal caso

$$\int_\alpha^{+\infty} x^\rho \, dx = -\frac{\alpha^{\rho+1}}{\rho+1}$$

y en particular

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

iv. Si $0 < \alpha < \beta < +\infty$, entonces f_ρ es integrable en $]\alpha,\beta[$ para cualquier valor de $\rho \in \mathbb{R}$, siendo

$$\int_\alpha^\beta x^\rho \, dx = \begin{cases} \frac{\beta^{\rho+1}-\alpha^{\rho+1}}{\rho+1} & \text{si} \quad \rho \neq -1 \\ \\ \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) & \text{si} \quad \rho = -1 \end{cases}.$$

En efecto, f_ρ es una función medible y positiva que, para cualquier real ρ, admite primitiva en $\mathbb{R}^+$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^{\rho+1}}{\rho+1} & \text{si} \quad \rho \neq -1 \\ \\ \log(x) & \text{si} \quad \rho = -1 \end{cases}.$$

Puesto que

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \rho+1 \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \rho+1 > 0 \end{cases}.$$

y

$$\lim_{x\to +\infty} F(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \rho+1 \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad \rho+1 < 0 \end{cases}$$

el enunciado se sigue aplicando el apartado ii de la proposición anterior.

3.1.3. Cambio de variable

Los resultados de este apartado son la particularización para integrales simples de los correspondientes para integrales múltiples (Teoremas 3.2.11 y 3.2.12).

3.1.9 Teorema (Cambio de variable para funciones medibles positivas)**.** *Sean I y J intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, ϕ un difeomorfismo de clase C^1 de I sobre J y $f : J \longrightarrow [0,+\infty[$ una función medible. Entonces*

$$\int_J f(x)\,dx = \int_I f(\phi(t))|\phi'(t)|\,dt.$$

3.1.10 Teorema (Cambio de variable)**.** *Sean I y J intervalos abiertos de $\mathbb{R}$, ϕ un difeomorfismo de clase C^1 de I sobre J y $f : J \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces f es integrable en J si, y sólo si, $(f\circ\phi)|\phi'|$ es integrable en I cuyo caso*

$$\int_J f(x)\,dx = \int_I f(\phi(t))|\phi'(t)|\,dt.$$

Observación 3.1.11.

i. En la práctica, dada una función $f :]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ medible queremos saber, utilizando un adecuado cambio de variable, si es integrable, y en tal caso calcular su integral. Es importante tener en cuenta que una función derivable $\phi : I \to \mathbb{R}$ es un difeomorfismo si, y sólo si,

$$\phi'(t) \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

En cuyo caso es bien conocido (Teorema del valor medio) que ϕ es estrictamente monótona y ocurre una de las posibilidades siguientes:

$$1)\ \phi'(t) > 0,\ \forall t \in I \quad \text{o} \quad 2)\ \phi'(t) < 0, \quad \forall t \in I.$$

En el caso 1) se tiene que $|\phi'| = \phi'$ y que $I =]\phi^{-1}(\alpha+), \phi^{-1}(\beta-)[$, mientras que en el caso 2) se tiene que $|\phi'| = -\phi'$ y que $I =]\phi^{-1}(\beta-), \phi^{-1}(\alpha+)[$, donde como es habitual

$$\phi^{-1}(\alpha+) = \lim_{x\to\alpha,\ x>\alpha} \phi^{-1}(x) \quad \text{y} \quad \phi^{-1}(\beta-) = \lim_{x\to\beta,\ x<\beta} \phi^{-1}(x).$$

En consecuencia, se tiene que f es integrable en $]\alpha,\beta[$ si, y sólo si, $(f\circ\phi)\phi'$ es integrable en I, en cuyo caso obtenemos la siguiente fórmula del cambio de variable:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(\alpha+)}^{\phi^{-1}(\beta-)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$

ii. A partir del Teorema fundamental del cálculo se prueban versiones más generales del teorema del cambio de variable donde no se exige que ϕ sea de clase C^1. Concretamente:

Sean I y J intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ y ϕ una función derivable de I sobre J tal que $\phi'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

i. Si $f : J \longrightarrow [0,+\infty[$ es una función medible, entonces

$$\int_J f(x)\,dx = \int_I f(\phi(t))\,|\phi'(t)|\,dt.$$

ii. Si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, entonces f es integrable en J si, y sólo si, $(f\circ\phi)\,\phi'(t)$ es integrable en I, en cuyo caso

$$\int_J f(x)\,dx = \int_I f(\phi(t))\,|\phi'(t)|\,dt.$$

Recordamos en la tabla del Apéndice 3.3.2 algunos de los cambios de variable más habituales.

3.1.4. Integración por partes

El último método de cálculo de integrales es la fórmula de integración por partes.

3.1.12 Proposición (Fórmula de integración por partes)**.** *Sean $u,v :]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables tales que $u'v$ y uv' son localmente acotadas e integrables. Entonces existen $\lim_{x\to\alpha} u(x)v(x)$ y $\lim_{x\to\beta} u(x)v(x)$ y se verifica*

$$\int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,dt = \lim_{x\to\beta} u(x)v(x) - \lim_{x\to\alpha} u(x)v(x) - \int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,dt.$$

Demostración. uv es una primitiva de la función $u'v + uv'$ que es integrable y en consecuencia el resultado se deduce directamente de la regla de Barrow. □

Observación 3.1.13.

i. Hay que observar que la utilidad de la anterior fórmula depende de la habilidad que se tenga para expresar el integrando en la forma adecuada. En el Apéndice 3.3.3 recordamos algunos de los procedimientos habituales.

ii. La fórmula de integración por partes es válida también sin exigir la hipótesis de acotación local, ya que la regla de Barrow no la requiere.

3.1.5. Criterios de comparación

En el estudio de la integrabilidad de una función localmente integrable $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ es decisivo el comportamiento de la función en los extremos del intervalo. Puesto que sabemos que para cada $c \in I$: f es integrable en I si, y sólo si, f es integrable en $I \cap]-\infty, c]$ y en $I \cap [c, +\infty[$; podemos centrar nuestro estudio en intervalos semiabiertos y, por una simple cuestión de simetría, nos bastará con enunciar los resultados para intervalos de la forma:

$$[\alpha, \beta[\quad \text{con } -\infty < \alpha < \beta \leq +\infty.$$

Es importante destacar que la idea que subyace en lo que sigue es la siguiente propiedad elemental:

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente integrable para la que existe una función $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable tal que $|f| \leq g$, entonces f es integrable.

El primer resultado muestra que si $\beta < +\infty$ y la función es acotada en las cercanías de β, entonces f es integrable.

3.1.14 Proposición. *Sean $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ y $f : [\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Supongamos que existen $c \in [\alpha, \beta[$ y $M > 0$ tales que*

$$|f| \leq M, \qquad \forall x \in [c, \beta[$$

(lo cual ocurre en particular si f tiene límite finito en β). Entonces f es integrable.

Demostración. Como f es integrable en $[\alpha, c]$ por hipótesis y es también integrable en $[c, \beta[$ por ser acotada, concluimos que f es integrable. □

Ejemplo 3.1.15.

i. La función de $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathrm{sen}(\frac{1}{x})$ es localmente integrable (por ser continua) y al ser acotada (pese a que no tiene límite en 0), es integrable.

ii. La condición no es necesaria. La función de $]0,1[$ en $\mathbb{R}$ definida por $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$, no está acotada y, sin embargo, es integrable, es más sabemos incluso que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

3.1.16 Proposición (Criterio de comparación)**.** *Sean $-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ y $f, g : [\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ funciones localmente integrables con $g(x) \neq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta[$. Supongamos que*

$$\lim_{x \to \beta} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Entonces

i. Si $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f es integrable si, y sólo si, g es integrable.

ii. Si $L = 0$ y g es integrable, entonces f es integrable.

iii. Si $L = \pm\infty$ y f es integrable, entonces g es integrable.

Demostración. i) Existe $c \in]\alpha, \beta[$ tal que

$$\frac{|L|}{2} < \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < 2|L|, \quad \forall x \in [c, \beta[$$

y, en consecuencia,

$$\frac{|L|}{2} \, |g(x)| < |f(x)| < 2|L| \, |g(x)|, \qquad \forall x \in [c, \beta[$$

de donde se deduce que f es integrable en $[c, \beta[$ si, y sólo si, g es integrable en $[c, \beta[$. Como f y g son integrables en $[\alpha, c]$, de lo anterior deducimos i).

ii) Existe $c \in]\alpha, \beta[$ tal que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < 1, \qquad \forall x \in [c, \beta[$$

y en consecuencia

$$|f(x)| < |g(x)|, \qquad \forall x \in [c, \beta[$$

de donde, supuesto g integrable, deducimos que f es integrable en $[c, \beta[$. Como f es integrable en $[\alpha, c]$ de lo anterior concluimos que f es integrable en $[\alpha, \beta[$.

iii) Existe $c \in]\alpha, \beta[$ tal que $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| > 1, \ \ \forall x \in [c, \beta[$ y en consecuencia

$$|f(x)| > |g(x)|, \forall x \in [c, \beta[$$

de donde, supuesto f integrable, deducimos que g es integrable en $[c, \beta[$. Como g es integrable en $[\alpha, c]$ de lo anterior concluimos que g es integrable en $[\alpha, \beta[$. □

Observación 3.1.17. Supongamos que $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ y que $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente integrable. Para estudiar la integrabilidad de f deberemos estudiar su comportamiento en los extremos del intervalo α y β.

- Siempre que el extremo sea infinito el extremo será problemático y se procederá a comparar con conveniente función con el fin de aplicar la proposición 3.1.16.
- Cuando el extremo estudiado sea finito nos podemos encontrar con dos situaciones distintas:
  - la función está acotada en las cercanías del extremo, lo cual ocurre siempre que la función tenga límite finito en tal extremo, en cuyo caso aplicamos la proposición 3.1.14;
  - la función no está acotada en las cercanías del extremo, lo cual ocurre siempre que tenga límite infinito en tal extremo, y en este caso procedemos a comparar con conveniente función con objeto de aplicar la proposición 3.1.16.

Hay que advertir en este punto que el problema radica en la habilidad para encontrar la función apropiada con la que comparar nuestra función original en el punto en cuestión. La elección de esta función test debe de tener en cuenta los siguientes detalles:

- La función test ha de ser suficientemente parecida a la función original al tender al extremo considerado.

  En la práctica solemos encontrarnos con funciones que son producto de varias y sólo en uno de los factores reside la clave de la integrabilidad de la función siendo el resto irrelevante para el problema. Este hecho se materializa eligiendo precisamente este factor como función test. ¿Cómo elegir el factor adecuado? Es cuestión de averiguar cual es el factor que predomina sobre el resto y tal información suele ser proporcionada por la escala de infinitos.
- La función test ha de ser suficientemente simple como para que poder estudiar su integrabilidad mediante la regla de Barrow, cambio de variable o integración por partes.

Ejemplo 3.1.18.

i. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{-x^2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

es localmente integrable por ser continua. Por simetría, nos podemos limitar a estudiar su integrabilidad en $[0, +\infty[$. Y a su vez nos podemos limitar al intervalo $[1, +\infty[$ donde se puede comparar con el ejemplo tipo x^{-2} para concluir que f es integrable pues

$$\frac{e^{-x^2}}{x^{-2}} = \frac{x^2}{e^{x^2}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to +\infty.$$

ii. Sean $\rho \in \mathbb{R}$ y $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Consideramos la función $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^{\rho} e^{-\gamma x} \ \ \forall x \in]0, +\infty[.$$

El problema de la integrabilidad de esta función reside en los dos extremos del intervalo 0 y $+\infty$.

- Como ya se ha advertido anteriormente $+\infty$ es siempre un punto problemático. En $+\infty$ el factor que predomina es obviamente $e^{-\gamma x}$. La función $x \mapsto e^{-\gamma x}$ es trivialmente integrable en $]0, +\infty[$ pues disponemos de una primitiva $x \mapsto \frac{-1}{\gamma} e^{-\gamma x}$ que tiene límite finito en ambos extremos y, de hecho, $\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} dx = \frac{1}{\gamma}$. Podemos aventurar entonces que la f va a ser integrable en la parte que involucra $+\infty$, esto es en cualquier intervalo $[\alpha, +\infty[$ con $\alpha > 0$. La constatación de este hecho exige sin embargo un poco de esfuerzo adicional. Obsérvese que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\rho} e^{-\gamma x}}{e^{-\gamma x}}$ es $+\infty$ en el caso de que $\rho > 0$, y en esta situación la integrabilidad de la función $x \mapsto e^{-\gamma x}$ no nos proporciona la integrabilidad de la función f. Este tipo de inconvenientes se suelen solventar aumentando sensiblemente la función test para conseguir que el límite correspondiente sea finito y sin que este aumento merme la integrabilidad de la función test. En nuestro caso concreto tomaremos como función test (en $+\infty$) la función

$$x \mapsto e^{\delta x}$$

con $\delta < \gamma$ cualquiera. Con esta elección la función test sigue siendo integrable y ahora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\rho} e^{-\gamma x}}{e^{-\delta x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\rho}}{e^{(\gamma - \delta)x}} = 0$$

pues $\gamma - \delta > 0$.

- Pasamos ahora a estudiar el comportamiento de f en 0. Merece la pena detenerse un momento para verificar si en 0 hay efectivamente problema. Como $\lim_{x\to 0} x^{\rho}e^{-\gamma x} = +\infty$ siempre que $\rho < 0$ el punto 0 ha de considerarse como problemático (aunque sólo en el caso de que $\rho < 0$). El factor $e^{-\gamma x}$ tiene límite 1 en 0. En consecuencia la clave se de la integrabilidad se encuentra en el otro factor x^{ρ}. En efecto

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{\rho}e^{-\gamma x}}{x^{\rho}} = \lim_{x\to 0} e^{-\gamma x} = 1.$$

  En consecuencia f es integrable en la parte que concierne al cero, esto es $]0,\beta]$ (para $\beta > 0$ arbitrario), si, y sólo si, lo es la función $x \mapsto x^{\rho}$. Por otra parte esta última función la conocemos perfectamente. En la región que nos ocupa es integrable si, y sólo si, $\rho > -1$. Por tanto f es integrable en $]0,\beta]$ si, y sólo si, $\rho > -1$.
- Unimos ahora la información obtenida para los dos extremos. En lo referente a $+\infty$ siempre tenemos integrabilidad y en lo que respecta al 0 hay integrabilidad si, y sólo si, $\rho > -1$. Podemos concluir que f es integrable en $]0,+\infty[$ si, y sólo si, $\rho > -1$.

3.2. Integrales múltiples

3.2.1. Teoremas de Fubini y Tonelli

Para calcular integrales múltiples no se dispone de ningún procedimiento elemental comparable a la regla de Barrow, pero se dispone de un resultado fundamental que relaciona la integral en $\mathbb{R}^N$ con integraciones sucesivas en espacios de menor dimensión, lo que en última instancia permite evaluar integrales múltiples realizando integraciones iteradas en cada una de las variables. Este resultado es el Teorema de Fubini.

3.2.1 Teorema (de Fubini)**.** *Sean $p, q \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

i. Para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, la función definida en $\mathbb{R}^p$ por

$$x \mapsto f(x,y)$$

es integrable en $\mathbb{R}^p$ y la función definida casi por doquier en $\mathbb{R}^q$ por

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx$$

es integrable en $\mathbb{R}^q$.

ii. Para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$ la función definida en $\mathbb{R}^q$ por

$$y \mapsto f(x,y)$$

es integrable en $\mathbb{R}^q$ y la función definida casi por doquier en $\mathbb{R}^p$ por

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} (x,y)\, dy$$

es integrable en $\mathbb{R}^p$.

iii.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\, d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy \right] dx.\end{aligned}$$

Demostración. Designemos por $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ integrables que satisfacen las propiedades i, ii y iii antes enunciadas. La demostración consiste en probar que $\mathcal{F}$ contiene todas las funciones integrables en $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, lo que haremos en varias etapas. Puesto que los papeles de p y q son intercambiables, es suficiente comprobar i y la primera igualdad de iii.

a. *$\mathcal{F}$ es un espacio vectorial.* La demostración es consecuencia inmediata de que la unión de dos conjuntos de medida cero es de medida cero y de las propiedades de la integral de Lebesgue.

b. *$\mathcal{F}$ es estable por paso al límite de sucesiones monótonas: si (f_n) es una sucesión monótona de funciones de $\mathcal{F}$ que converge puntualmente hacia una función integrable f, entonces $f \in \mathcal{F}$.*

En efecto, podemos suponer que (f_n) es creciente (en otro caso consideraríamos la sucesión $(-f_n)$). En primer lugar, como para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ se verifica que

$$f_n(x,y) \to f(x,y),$$

la monotonía de la integral nos asegura que

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f_n(x,y)\, d(x,y) \leq \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\, d(x,y), \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

y se deduce del Teorema de la convergencia monótona 2.3.1 (para funciones en $\mathbb{R}^{p+q}$) que

$$\lim \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f_n(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\, d(x,y). \tag{3.2}$$

Utilizando que la unión numerable de conjuntos de medida cero es de medida cero, se deduce la existencia de $Z \subset \mathbb{R}^q$ de medida (q-dimensional) cero tal que para todo $y \in \mathbb{R}^q \setminus Z$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, la aplicación

$$x \to f_n(x,y)$$

es integrable en $\mathbb{R}^p$ y la función definida casi por doquier en $\mathbb{R}^q$ por

$$F_n(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f_n(x,y)\, dx$$

es integrable en $\mathbb{R}^q$, siendo además

$$\int_{\mathbb{R}^q} F_n(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} f_n(x,y)\, dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f_n(x,y)\, d(x,y).$$

La sucesión (F_n) es claramente creciente (podemos definir $F_n(y) = 0, \;\; \forall y \in Z$). La desigualdad (3.1) nos permite en consecuencia aplicar el teorema de la convergencia monótona 2.3.1 (para funciones en $\mathbb{R}^q$) para deducir que para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, la sucesión $(F_n(y))$ es convergente, luego acotada. Ahora, como para cada $y \in \mathbb{R}^q$ es

$$\lim f_n(x,y) = f(x,y),$$

de nuevo el teorema de la convergencia monótona 2.3.1 (para funciones en $\mathbb{R}^p$) nos asegura que para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$ la función

$$x \mapsto f(x,y)$$

es integrable en $\mathbb{R}^p$ y que

$$\text{lím} \int_{\mathbb{R}^p} f_n(x,y)\, dx = \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx.$$

Puesto que por hipótesis

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f_n(x,y)\, dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f_n(x,y)\, d(x,y), \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

de nuevo la desigualdad (3.1) nos permite aplicar el Teorema de la convergencia monótona 2.3.1 (para funciones en $\mathbb{R}^q$) para afirmar que la función definida casi por doquier en $\mathbb{R}^q$ por

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx$$

es integrable en $\mathbb{R}^q$ y además

$$\text{lím} \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} f_n(x,y)\, dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx \right] dy.$$

Por último, teniendo ahora en cuenta (3.2) y (3.3), concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx \right] dy.$$

c. *Si $E \subset \mathbb{R}^{p+q} \equiv \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ es medible con $\lambda(E) < \infty$, entonces $\chi_E \in \mathcal{F}$.*

La demostración de este apartado la dividiremos en varios subapartados:

c.1. *Si I es un intervalo acotado de $\mathbb{R}^p$ y J es un intervalo acotado de $\mathbb{R}^q$, entonces $\chi_{I\times J} \in \mathcal{F}$.*

En efecto,

$$\chi_{I\times J}(x,y) = \chi_I(x)\chi_J(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

y, consecuentemente, fijado $y \in \mathbb{R}^q$ la función definida en $\mathbb{R}^p$ por

$$x \mapsto \chi_{I\times J}(x,y)$$

es la función

$$\begin{cases} \chi_I & \text{si} \quad y \in J \\ 0 & \text{si} \quad y \notin J \end{cases}$$

que es integrable con integral

$$\int_{\mathbb{R}^p} \chi_{I\times J}(x,y)\, dx = \left\{ \begin{array}{lll} v(I) & \text{si} & y \in J \\ 0 & \text{si} & y \notin J \end{array} \right\} = v(I)\chi_J(y),$$

lo que prueba i. Probemos la primera igualdad de iii.

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} \chi_{I\times J}(x,y)\, d(x,y) = \lambda(I \times J) = v(I)v(J) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^q} v(I)\chi_J(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} \chi_{I\times J}(x,y)\, dx \right] dy.$$

c.2. *Si $G \subset \mathbb{R}^{p+q}$ es un conjunto abierto con $\lambda(G) < \infty$, entonces $\chi_G \in \mathcal{F}$.*

Pongamos $G = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ para conveniente sucesión (I_n) de intervalos acotados de $\mathbb{R}^{p+q}$ disjuntos dos a dos. Entonces

$$\chi_G = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{I_n}.$$

Definamos

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por los apartados a y c.1, $f_n \in \mathcal{F}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por b, concluimos que $\chi_G \in \mathcal{F}$.

c.3. *Si $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ es un conjunto G_δ con $\lambda(A) < \infty$, entonces $\chi_A \in \mathcal{F}$.*

En efecto, sea (G_n) una sucesión decreciente de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^{p+q}$ tal que

$$\lambda(G_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Entonces $(\chi_{G_n}) \searrow \chi_A$ y el apartado b nos permite asegurar que $\chi_A \in \mathcal{F}$.

c.4. *Si $Z \subset \mathbb{R}^{p+q}$ es un conjunto de medida cero, entonces $\chi_Z \in \mathcal{F}$.*

En efecto, existe una sucesión (G_n) de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^{p+q}$ tal que

$$Z \subset G_{n+1} \subset G_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \text{lím}\, \lambda(G_n) = 0.$$

Sea A= $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Este conjunto satisface

$$Z \subset A,\ \lambda(A) = 0 \text{ y } \chi_A \in \mathcal{F} \quad \text{(subapartado anterior)}.$$

Se tiene, por tanto, que

$$0 = \lambda(A) = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} \chi_A(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^p} \chi_A(x,y)\, dx \right] dy,$$

y en consecuencia, en virtud de la Proposición 2.2.7 iv),

$$\int_{\mathbb{R}^p} \chi_A(x,y)\, dx = 0, \quad (c.p.d.\ y \in \mathbb{R}^q)$$

y, fijado uno de estos y, también

$$\chi_A(x,y) = 0, (c.p.d.\ x \in \mathbb{R}^p).$$

Al ser

$$0 \le \chi_Z(x,y) \le \chi_A(x,y),$$

concluimos que para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, la aplicación $x \mapsto \chi_Z(x,y)$ es cero c.p.d., y por lo tanto integrable. De nuevo la Proposición 2.2.7 iv) nos asegura que para casi todo $y \in \mathbb{R}^q$ es

$$\int_{\mathbb{R}^p} \chi_Z(x,y)\, dx = 0,$$

y, por tanto, la aplicación definida casi por doquier en $\mathbb{R}^q$ por

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} \chi_Z(x,y)\, dx$$

es nula c.p.d. y por tanto, integrable. Hemos probado i) para χ_Z. Otra vez la Proposición 2.2.7 iv) nos dice que

$$\int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} \chi_Z(x,y)\, dx \right] dy = 0$$

y como

$$0 = \lambda(Z) = \int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} \chi_Z(x,y)\, d(x,y)$$

la primera igualdad de iii queda probada.

Probemos ya el apartado c. Sea $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ un conjunto medible con medida finita. El Teorema 1.2.10 nos asegura la existencia de un conjunto G_δ, A, y un conjunto de medida cero Z tales que

$$A = E \cup Z \quad \text{y} \quad E \cap Z = \emptyset.$$

Se tiene que

$$\chi_E = \chi_A - \chi_Z.$$

Como $\lambda(A) < \infty$, virtud de los apartados c.3, c.4 y a, concluimos que $\chi_E \in \mathcal{F}$.

d. *Si $f : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces $f \in \mathcal{F}$.*

En efecto, en virtud del apartado a, bastará probar que f^+ y f^- están en $\mathcal{F}$. Veamos que $f^+ \in \mathcal{F}$ (la comprobación de que $f^- \in \mathcal{F}$ es idéntica). El Teorema de aproximación de Lebesgue 2.1.11 nos asegura que existe una sucesión creciente (s_n) de funciones simples positivas que converge a f^+. Es claro que las funciones s_n son integrables y, virtud de los apartados a y c, cada $s_n \in \mathcal{F}$. Por último el apartado b nos permite concluir que $f^+ \in \mathcal{F}$. $\square$

Observación 3.2.2.

i. Las propiedades i y ii del teorema anterior se resumen diciendo que la función f tiene integrales iteradas y la propiedad iii garantiza que ambas son iguales e iguales a la integral de la función f.

ii. Es importante recordar que el orden en el que se realicen las integraciones iteradas es irrelevante. En la práctica elegiremos el orden de integración que nos resulte más conveniente en cada problema.

3.2.3 Corolario. *Sean $p, q \in \mathbb{N}$ y sea $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$ un conjunto medible. Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

i. Para cada casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, el conjunto

$$E(x) := \{y \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in E\}$$

es medible.

ii. Para cada casi todo $y \in \mathbb{R}^q$, el conjunto

$$E(y) := \{x \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in E\}$$

es medible.

Demostración. Si $\lambda(E) < \infty$, basta aplicar el Teorema de Fubini a χ_E. En otro caso, la propiedad es cierta para cada conjunto $E_n = E \cap B_\infty(0,n)$, y basta pensar que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

□

Observación 3.2.4 (Fórmula del teorema de Fubini en conjuntos medibles)**.**

i. Si $E \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto medible y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y)\, d(x,y) &= \int_{x=\alpha_1}^{x=\beta_1} \left[\int_{E(x)} f(x,y)\, dy\right] dx \\ &= \int_{y=\alpha_2}^{y=\beta_2} \left[\int_{E(y)} f(x,y)\, dx\right] dy,\end{aligned}$$

siendo

$$\alpha_1 = \text{ínf} E_1, \;\; \beta_1 = \sup E_1, \;\; \alpha_2 = \text{ínf} E_2, \;\; \beta_2 = \sup E_2$$

donde

$$E_1 = \pi_1(E) \quad \text{y} \quad E_2 = \pi_2(E)$$

(π_1, π_2 son las proyecciones sobre los ejes coordenados) y para cada $x \in]\alpha_1, \beta_1[$ (resp. $y \in]\alpha_2, \beta_2[$) es

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in E\}$$
$$(\text{resp. } E(y) = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in E\}).$$

En particular, cuando $E =]\alpha, \beta[\times]\gamma, \delta[$, con $-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty$ y $-\infty \le \gamma < \delta \le +\infty$, entonces

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y)\, d(x,y) &= \int_{x=\alpha}^{x=\beta} \left[\int_{y=\gamma}^{y=\delta} f(x,y)\, dy\right] dx \\ &= \int_{y=\gamma}^{y=\delta} \left[\int_{x=\alpha}^{x=\beta} f(x,y)\, dx\right] dy.\end{aligned}$$

ii. Sea $E \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. La integral de la función f se puede calcular mediante una integración simple y una integración doble:

$$\begin{aligned}\int_E f(x,y,z)\, d(x,y,z) &= \int_{z=\alpha_3}^{z=\beta_3} \left[\int_{E(z)} f(x,y,z)\, d(x,y)\right] dz \\ &= \int_{y=\alpha_2}^{y=\beta_2} \left[\int_{E(y)} f(x,y,z)\, d(x,z)\right] dy \\ &= \int_{x=\alpha_1}^{x=\beta_1} \left[\int_{E(x)} f(x,y,z)\, d(y,z)\right] dx,\end{aligned}$$

siendo

$$\alpha_i = \text{ínf}\, E_i, \quad \beta_i = \sup E_i, \quad (i = 1,2,3),$$

donde $E_i = \pi_i(E)$, y para $x \in]\alpha_1, \beta_1[$, $y \in]\alpha_2, \beta_2[$ y $z \in]\alpha_3, \beta_3[$ es

$$E(x) = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in E\},$$

$$E(y) = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in E\},$$

$$E(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in E\}.$$

Cada una de las integrales dobles que aparecen anteriormente se pueden expresar (si así se quiere) como dos integrales simples mediante el procedimiento establecido en el apartado anterior. En consecuencia nuestra integral triple se puede realizar mediante tres integraciones simples (¿Cuántas posibilidades hay?).

Demostración. Teniendo en cuenta el Teorema de Fubini y el hecho de que

$$\chi_E(x,y) = \chi_{]\alpha_1,\beta_1[}(x)\chi_{E(x)}(y), \;\; ct\ x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

se tiene que:

$$\int_E f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\chi_E(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\chi_E(x,y)\, dy\right] dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\chi_{]\alpha_1,\beta_1[}(x)\chi_{E(x)}(y)\, dy\right] dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, \chi_{E(x)}(y)\, dy\right] \chi_{]\alpha_1,\beta_1[}(x)\, dx =$$

$$\int_{]\alpha_1,\beta_1[} \left[\int_{E(x)} f(x,y)\, dy\right] dx = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_{E(x)} f(x,y)\, dy\right] dx.$$

Finalmente, un intercambio de papeles, da la otra igualdad. □

Ejemplo 3.2.5.

i. *Área del círculo.* Sea $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ $(r > 0)$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\lambda(E) = \int_E d(x,y) &= \int_{x=-r}^{x=r} \left[\int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} dy \right] dx = \int_{x=-r}^{x=r} 2\sqrt{r^2-x^2}\, dx \\
&= \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{r^2 - r^2\sin^2(t)}\, r\cos(t)\, dt \\
&= \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} 2r^2\cos^2(t)\, dt = \int_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} r^2(1+\cos(2t))\, dt \\
&= \left[r^2 \left(t + \frac{1}{2}\sin(2t) \right) \right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \pi r^2.
\end{aligned}$$

ii. *Volumen de la esfera.* Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ $(r > 0)$.

$$\begin{aligned}
\lambda(E) = \int_E d(x,y,z) &= \int_{z=-r}^{z=r} \left[\int_{E(z)} d(x,y) \right] dz \\
&= \int_{z=-r}^{z=r} \left[\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq r^2-z^2\}} d(x,y) \right] dz \\
&= \int_{z=-r}^{z=r} \lambda\Big(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq r^2 - z^2\} \Big)\, dz \\
&= \int_{z=-r}^{z=r} \pi(r^2 - z^2)\, dz = \pi \left[r^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=-r}^{z=r} = \frac{4}{3}\pi r^3.
\end{aligned}$$

Observación 3.2.6.

i. El teorema de Fubini garantiza que si una función f es integrable entonces todas sus integrales iteradas existen y coinciden. En consecuencia si alguna de las integrales iteradas no existe o aun existiendo no son todas iguales, entonces podemos concluir que la función no es integrable. Puesto que no se trata de un método muy económico no debe ser usado sistemáticamente para estudiar la no integrabilidad de una función.

   Es conveniente saber también que la existencia e igualdad de todas las integrales iteradas de la función no garantiza en absoluto la integrabilidad de ésta. A continuación damos un ejemplo de este hecho.

ii. El teorema de Tonelli, que veremos posteriormente, nos muestra la manera de verificar si una función es o no integrable mediante integraciones iteradas.

Ejemplo 3.2.7.

i. La función $f :]0,1[\times]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

admite las dos integrales iteradas pero no son iguales y en consecuencia f no es integrable. En efecto, como

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

se tiene, utilizando la regla de Barrow que

$$\int_{y=0}^{y=1}\left[\int_{x=0}^{x=1} f(x,y)\,dx\right]\,dy = \int_{y=0}^{y=1}\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1}\,dy$$
$$= \int_{y=0}^{y=1} \frac{-1}{1+y^2}\,dy = \Big[-\arctan y\Big]_{y=0}^{y=1} = \frac{-\pi}{4}.$$

Análogamente se prueba que

$$\int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=0}^{y=1} f(x,y)\,dy\right]\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

ii. La función $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2},$$

admite las dos integrales iteradas y son iguales, pero, sin embargo, no es integrable. En efecto

$$\int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left[\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\,dx\right]\,dy =$$
$$\int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left[\int_{x=-\infty}^{x=0} f(x,y)\,dx + \int_{x=0}^{x=+\infty} f(x,y)\,dx\right]\,dy =$$
$$\int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left[\int_{x=0}^{x=+\infty} (-f(x,y)+f(x,y))\,dx\right]\,dy =$$
$$\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} 0\,dy = 0,$$

donde se ha utilizado que $f(-x,y) = -f(x,y), \ \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}$. Análogamente se prueba que

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left[\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\,dy\right]\,dx = 0.$$

Veamos que no es integrable. Si fuese f integrable también lo sería $|f|$ con lo que, en virtud del Teorema de Fubini, se tendría que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\, d(x,y) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \left[\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} |f(x,y)|\, dy \right] dx,$$

pero

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} |f(x,y)|\, dx = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{|x|\,|y|}{(x^2+y^2)^2}\, dx =$$

$$|y| \int_{x=0}^{x=+\infty} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\, dx = |y| \left[\frac{-1}{x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{1}{|y|},$$

y, en consecuencia,

$$\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \left[\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} |f(x,y)|\, dx \right] dy = +\infty.$$

Obsérvese que se ha usado el hecho de que la existencia de las integrales iteradas de $|f|$ es una condición necesaria para la integrabilidad de f. El siguiente teorema afirma que dicha condición es también suficiente para que una función medible sea integrable.

3.2.8 Teorema (de Tonelli)**.** *Sean $p,q \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Supongamos que alguna de las siguientes integrales iteradas:*

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)|\, dy \right] dx, \quad \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)|\, dx \right] dy$$

es finita. Entonces f es integrable.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $f_n : \mathbb{R}^{p+q} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x,y) = \begin{cases} \text{mín}\{|f(x,y)|, n\} & \text{si} \quad \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 < n^2 \\ 0 & \text{si} \quad \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \geq n^2 \end{cases}$$

es integrable (puesto que está dominada por n en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 < n^2\}$ que es de medida finita por ser acotado). El Teorema de Fubini nos dice ahora que

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f_n(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} f_n(x,y)\, dx \right] dy = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f_n(x,y)\, dy \right] dx.$$

y, como $f_n \leq |f|$, las integrales iteradas de f_n están mayoradas por una cualquiera de las integrales iteradas de $|f|$ y obtenemos así, en virtud de la hipótesis hecha, que la sucesión

$$\left(\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f_n(x,y)\, d(x,y) \right)$$

está mayorada. Puesto que la sucesión (f_n) es creciente y además la sucesión (f_n) converge puntualmente a $|f|$, el Corolario 2.3.2 nos asegura que la función $|f|$ es integrable. $\square$

Combinando los teoremas de Fubini y Tonelli obtenemos el siguiente resultado.

3.2.9 Corolario. *Sean $p,q \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces f es integrable si, y sólo si, alguna de las siguientes integrales iteradas:*

$$\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} |f(x,y)| \, dy \right] \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} |f(x,y)| \, dx \right] \, dy$$

es finita. En tal caso las dos son finitas y coinciden. Además

$$\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x,y) \, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) \, dy \right] \, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) \, dx \right] \, dy.$$

A continuación haciendo uso del corolario anterior daremos una muy importante interpretación de la integral de una función en términos de la medida de Lebesgue.

3.2.10 Corolario. *Sea $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0,+\infty[$ una función medible. Entonces f es integrable si, y sólo si, el conjunto*

$$P_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} : \; 0 < y < f(x)\}$$

tiene medida finita, en cuyo caso

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \, dx = \lambda\left(P_f\right).$$

Demostración. Observemos en primer lugar que el conjunto P_f es medible. En efecto, no es difícil comprobar que la función $\phi : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x,y) = f(x) - y$$

es medible y por otra parte

$$P_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{N+1} : 0 < \phi(x,y)\right\} \cap \left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+\right).$$

Como la función $\chi_{P_f} : \mathbb{R}^{N+1} \to [0,+\infty[$ es medible podemos aplicar el corolario anterior para deducir que χ_{P_f} es integrable (es decir $\lambda\left(P_f\right) < +\infty$) si, y sólo si, la integral iterada

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\int_{\mathbb{R}} \chi_{P_f}(x,y) \, dy \right] \, dx$$

es finita. Puesto que

$$\chi_{P_f}(x,y) = \chi_A(x)\chi_{]0,f(x)[}(y)$$

donde

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) > 0\right\},$$

se tiene para cada $x \in \mathbb{R}^N$ que

$$\begin{aligned}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \chi_{P_f}(x,y)\, dy &= \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \chi_A(x)\chi_{]0,f(x)[}(y)\, dy \\ &= \chi_A(x)\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \chi_{]0,f(x)[}(y)\, dy \\ &= \chi_A(x)\int_{y=0}^{y=f(x)} dy = \chi_A(x)f(x).\end{aligned}$$

Concluimos en consecuencia que la finitud de la integral iterada de χ_{P_f} antes considerada equivale a la integrabilidad de f y que en tal caso se tiene:

$$\lambda\left(P_f\right) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \chi_{P_f}(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx.$$

□

3.2.2. Teorema del cambio de variable

3.2.11 Teorema (del cambio de variable para funciones medibles positivas)**.** *Sean Ω y G subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$, ϕ un difeomorfismo de clase C^1 de Ω sobre G y $f : G \to [0,+\infty[$ una función medible. Entonces*

$$\int_{\phi(E)} f(x)\, dx = \int_E f(\phi(t))\,|\det J_\phi(t)|\, dt$$

para todo subconjunto medible $E \subset \Omega$.

Demostración. A lo largo de la siguiente demostración notaremos por $\|\cdot\|_\infty$ la norma en $\mathbb{R}^N$ definida por

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|,\ldots,|x_N|\}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Para $a \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$ definimos

$$B_\infty(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \|x-a\| < r\}.$$

Si $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es una aplicación lineal notaremos

$$T = \text{máx}\{\|T(x)\|_\infty : \ \|x\|_\infty = 1\}.$$

La proposición 1.2.14 nos asegura que ϕ y ϕ^{-1} aplican conjuntos medibles en conjuntos medibles, esto es,

$$E \subset \Omega \text{ es medible} \Leftrightarrow \phi(E) \text{ es medible}.$$

Observemos ahora que la integral del segundo miembro de la fórmula del enunciado tiene sentido por ser $(f\circ\phi)|\det J_\phi|$ medible positiva. En efecto, $|\det J_\phi|$ es medible por ser continua. Veamos que $f\circ\phi$ es medible. Si U es un abierto de $[0,+\infty[$, entonces

$$(f\circ\phi)^{-1}(U)=\phi^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$$

que es medible por el comentario anterior. Si la igualdad es cierta, en particular lo será para $f=1$, es decir

$$\int_{\phi(E)} dx=\int_E |\det J_\phi(t)|\,dt$$

para todo conjunto medible $E\subset\Omega$, equivalentemente

$$\lambda(\phi(E))=\int_E |\det J_\phi(t)|\,dt$$

para todo conjunto medible $E\subset\Omega$. Probaremos la anterior igualdad en dos etapas:

a. *Demostramos en primer lugar que para cada $a\in\Omega$ y cada $\rho>1$ existe $\delta>0$ tal que $B_\infty(a,\delta)\subset\Omega$ y*

$$\rho^{-1}\int_E |\det J_\phi(t)|\,dt\le\lambda(\phi(E))\le\int_E |\det J_\phi(t)|\,dt$$

para todo conjunto $E\subset B_\infty(a,\delta)$ medible. En efecto, si notamos $T=D\phi(a)$, obsérvese que existe $\varepsilon\in]0,1[$ tal que

$$\rho^{-1}\le\frac{\left(1-\varepsilon\left\|T^{-1}\right\|\right)^N}{1+\varepsilon}<\frac{\left(1+\varepsilon\left\|T^{-1}\right\|\right)^N}{1-\varepsilon}\le\rho.$$

Fijemos un tal ε y denotemos $\alpha:=1-\varepsilon\left\|T^{-1}\right\|$ y $\beta:=1+\varepsilon\left\|T^{-1}\right\|$. Así la anterior cadena de desigualdades puede escribirse:

$$\rho^{-1}\le\frac{\alpha^N}{1+\varepsilon}<\frac{\beta^N}{1-\varepsilon}\le\rho.$$

Ahora, tomemos $\delta>0$ tal que $B_\infty(a,\delta)\subset\Omega$ y

$$\|x-a\|_\infty<\delta\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll}\|D\phi(x)-T\|<\varepsilon & (1)\\ 1-\varepsilon<\frac{\det J_\phi(x)}{\det J_\phi(a)}<1+\varepsilon & (2)\end{array}\right..$$

Del teorema del valor medio y de (1) se deduce que

$$x,y\in B_\infty(a,\delta)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty\le\beta\|T(x)-T(y)\|_\infty\\ \alpha\|T(x)-T(y)\|_\infty\le\|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty\end{array}\right..$$

En efecto, si $x=y$ no hay nada que probar. En otro caso

$$\begin{aligned}
\|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty &\le \|\phi(x)-\phi(y)-T(x-y)\|_\infty + \|T(x-y)\|_\infty \\
&= \|(\phi(x)-T(x))-(\phi(y)-T(y))\|_\infty + \|T(x-y)\|_\infty \\
&\le \|x-y\|_\infty \sup\{\|D\phi(z)-T\| : z\in]x,y[\} + \|T(x-y)\|_\infty \\
&\le \varepsilon\|x-y\|_\infty + \|T(x-y)\|_\infty \\
&= \varepsilon\left\|T^{-1}(T(x-y))\right\|_\infty + \|T(x-y)\|_\infty \\
&\le \varepsilon\left\|T^{-1}\right\| \|T(x-y)\|_\infty + \|T(x-y)\|_\infty \\
&= \beta\|T(x)-T(y)\|_\infty,
\end{aligned}$$

y así mismo

$$\begin{aligned}
\|T(x)-T(y)\|_\infty &\le \|\phi(x)-\phi(y)-T(x-y)\|_\infty + \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty \\
&= \|(\phi(x)-T(x))-(\phi(y)-T(y))\|_\infty + \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty \\
&\le \|x-y\|_\infty \sup\{\|D\phi(z)-T\| : z\in]x,y[\} + \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty \\
&\le \varepsilon\|x-y\|_\infty + \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty \\
&= \varepsilon\|T^{-1}(T(x-y))\|_\infty + \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty \\
&\le \varepsilon\|T^{-1}\| \, \|T(x-y)\|_\infty + \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty,
\end{aligned}$$

luego

$$\alpha\|T(x)-T(y)\|_\infty \le \|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty.$$

Las desigualdades anteriores se escriben también

$$\left\|\left(\phi\circ T^{-1}\right)(T(x))-\left(\phi\circ T^{-1}\right)(T(y))\right\|_\infty \le \beta\|T(x)-T(y)\|_\infty$$

$$\left\|\left(T\circ\phi^{-1}\right)(\phi(x))-\left(T\circ\phi^{-1}\right)(\phi(y))\right\|_\infty \le \frac{1}{\alpha}\|\phi(x)-\phi(y)\|_\infty$$

para cualesquiera $x,y\in B_\infty(a,\delta)$. Equivalentemente

$$u,v\in T(B_\infty(a,\delta)) \Rightarrow \left\|\left(\phi\circ T^{-1}\right)(u)-\left(\phi\circ T^{-1}\right)(v)\right\|_\infty \le \beta\|u-v\|_\infty$$

$$u,v\in \phi(B_\infty(a,\delta)) \Rightarrow \left\|\left(T\circ\phi^{-1}\right)(u)-\left(T\circ\phi^{-1}\right)(v)\right\|_\infty \le \frac{1}{\alpha}\|u-v\|_\infty.$$

Al verificar $\phi\circ T^{-1}$ y $T\circ\phi^{-1}$ las desigualdades anteriores en los abiertos $T(B_\infty(a,\delta))$ y $\phi(B_\infty(a,\delta))$ respectivamente, el Lema 1.2.13 y el Teorema 1.2.12 nos aseguran ahora que si $E\subset B_\infty(a,\delta)$ es medible, entonces

$$\lambda(\phi(E)) = \lambda\left(\left(\phi\circ T^{-1}\right)(T(E))\right) \le \beta^N\lambda(T(E)) = \beta^N|\det J_\phi(a)|\lambda(E)$$

y

$$|\det J_\phi(a)|\,\lambda(E) = \lambda(T(E)) = \lambda\left(\left(T\circ\phi^{-1}\right)(\phi(E))\right) \le \alpha^{-N}\lambda(\phi(E)).$$

Hemos probado que si $E \subset B_\infty(a,\delta)$ es medible, entonces se tiene

$$\alpha^N \mid \det J_\phi(a) \mid \ \lambda(E) \leq \lambda(\phi(E)) \leq \beta^N \mid \det J_\phi(a) \mid \ \lambda(E). \tag{3.4}$$

Por otra parte (2) se escribe también

$$(1-\varepsilon) \mid \det J_\phi(a) \mid < \mid \det J_\phi(t) \mid < (1+\varepsilon) \mid \det J_\phi(a) \mid, \forall t \in B_\infty(a,\delta)$$

y en consecuencia si $E \subset B_\infty(a,\delta)$ es medible, entonces se tiene

$$\int_E (1-\varepsilon) \mid \det J_\phi(a) \mid \ dt \leq \int_E \mid \det J_\phi(t) \mid \ dt \leq \int_E (1+\varepsilon) \mid \det J_\phi(a) \mid \ dt,$$

o equivalentemente

$$(1-\varepsilon) \mid \det J_\phi(a) \mid \lambda(E) \leq \int_E \mid \det J_\phi(t) \mid \ dt \leq (1+\varepsilon) \mid \det J_\phi(a) \mid \ \lambda(E) \tag{3.5}$$

La conjunción de (3.4) y (3.5) prueba el apartado a).

b. *Demostraremos ahora que para todo conjunto medible $E \subset \Omega$ se verifica:*

$$\lambda(\phi(E)) = \int_E \mid \det J_\phi(t) \mid \ dt.$$

Fijemos $\rho > 1$. Usando un argumento similar al utilizado en la Proposición 1.2.14 para expresar un abierto como una unión numerable de bolas abiertas, comprobemos que Ω se puede expresar como unión numerable de bolas abiertas, en cada una de las cuales se cumplen las desigualdades del apartado a). En efecto, para cada $x \in \Omega$ existe $\delta(x) > 0$ tal que se cumplen las condiciones del apartado a). Entonces

$$\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} B_\infty(x,\delta(x)).$$

Para cada $x \in \Omega$ sean $b_x \in \Omega \cap \mathbb{Q}^N$ y $r_x \in \mathbb{Q}^+$ tales que

$$x \in B_\infty(b_x, r_x) \subset B_\infty(x,\delta(x)).$$

Es claro que $\Omega = \bigcup_{x\in\Omega} B_\infty(b_x,r_x)$ y que la familia $\{B_\infty(b_x,r_x) : x \in \Omega\}$ es numerable. Pongamos

$$\{B_\infty(b_x,r_x) : x \in \Omega\} = \{B_\infty(b_n,r_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sea $E \subset \Omega$ medible. Es inmediato que E se puede expresar como una unión numerable de conjuntos medibles disjuntos entre sí

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ con } E_n \subset B_\infty(b_n,r_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

El apartado a) nos garantiza que para cada natural n se tiene

$$\rho^{-1}\int_{E_n} |\det J_\phi(t)|\ dt \leq \lambda(\phi(E_n)) \leq \rho \int_{E_n} |\det J_\phi(t)|\ dt.$$

Como la aplicación

$$E \to \int_E |\det J_\phi(t)|\ dt$$

es una medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{M}_\Omega$ (Corolario 2.3.4), la suma de las anteriores desigualdades proporciona la siguiente:

$$\rho^{-1}\int_{E} |\det J_\phi(t)|\ dt \leq \lambda(\phi(E)) \leq \rho \int_{E} |\det J_\phi(t)|\ dt.$$

Por último de la arbitrariedad de ρ se deduce el apartado b).

c. *Probaremos ahora que para toda función simple positiva s definida en G se verifica que*

$$\int_{\phi(E)} s(x)\ dx = \int_E s(\phi(t))\,|\det J_\phi(t)|\ dt, \forall E \subset \Omega \textit{ medible.}$$

Para probar c) basta probar que si $E \subset \Omega$ es medible, entonces

$$\int_{\phi(E)} \chi_A(x)dx = \int_E \chi_A(\phi(t))\,|\det J_\phi(t)|\ dt, \forall A \subset G \text{ medible},$$

o lo que es lo mismo

$$\int_{\phi(E)\cap A} dx = \int_{E\cap\phi^{-1}(A)} |\det J_\phi(t)|\ dt, \forall A \subset G \text{ medible}$$

es decir

$$\lambda(\phi(E)\cap A) = \int_{E\cap\phi^{-1}(A)} |\det J_\phi(t)|\ dt, \forall A \subset G \text{ medible}$$

lo que se deduce fácilmente de b) por ser ϕ biyectiva.

d. *Finalmente veremos que para toda función medible positiva f definida en G se verifica*

$$\int_{\phi(E)} f(x)\ dx = \int_E f(\phi(t))\,|\det J_\phi(t)|\ dt, \forall E \subset \Omega \textit{ medible.}$$

El teorema de aproximación de Lebesgue 2.1.11 nos asegura que existe una sucesión creciente (s_n) de funciones simples positivas que converge a f y basta aplicar c) y el Teorema de convergencia creciente para funciones medibles positivas 2.3.3. □

3.2.12 Teorema (del cambio de variable)**.** *Sean Ω y G subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$, ϕ un difeomorfismo de clase C^1 de Ω sobre G, $E \subset \Omega$ medible y $f : \phi(E) \to \mathbb{R}$ una función medible. Entonces f es integrable en $\phi(E)$ si, y sólo si, $(f \circ \phi)|\det J_\phi|$ es integrable en E, en cuyo caso se verifica*

$$\int_{\phi(E)} f(x)\, dx = \int_E f(\phi(t))|\det J_\phi(t)|\, dt.$$

Demostración. Por definición, f es integrable en $\phi(E)$ si $\int_{\phi(E)} \mid f(x) \mid\ dx < \infty$, lo cual equivale, en virtud del teorema anterior, a que

$$\int_E \mid f \mid (\phi(t)) \mid \det J_\phi(t) \mid\ dt = \int_E \mid (f(\phi(t)) \mid |\det J_\phi(t)|\, dt < \infty,$$

es decir $(f \circ \phi) \mid \det J_\phi \mid$ es integrable en E.
En el caso de que f sea integrable en $\phi(E)$ aplicamos nuevamente el teorema anterior para obtener

$$\int_{\phi(E)} f(x)\, dx = \int_{\phi(E)} f^+(x)\, dx - \int_{\phi(E)} f^-(x)\, dx =$$

$$\int_E f^+(\phi(t)) \mid \det J_\phi(t) \mid\ dt - \int_E f^-(\phi(t)) \mid \det J_\phi(t) \mid\ dt =$$

$$\int_E \left[f(\phi(t)) \mid \det J_\phi(t) \mid\right]^+ dt - \int_E \left[f(\phi(t)) \mid \det J_\phi(t) \mid\right]^- dt =$$

$$\int_E f(\phi(t)) \mid \det J_\phi(t) \mid\ dt.$$

□

Observación 3.2.13.

a) Para reconocer que ϕ es un difeomorfismo de clase C^1 de Ω sobre $\phi(\Omega)$ es usual utilizar el teorema global de la función inversa. En la práctica el conjunto de integración $\phi(E)$ es conocido y el problema radica en encontrar un cambio de variable adecuado y en conocer E, esto es, el conjunto de $\mathbb{R}^N$ que se aplica mediante el difeomorfismo ϕ en el conjunto de partida. Es usual también, una vez efectuado el cambio de variable, utilizar el teorema de Fubini para calcular la integral.

b) En las condiciones del Teorema del cambio de variable, obsérvese que si además $\lambda(G^c) = 0$, entonces para cualquier conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^N$ una función medible $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable si, y sólo si, $(f \circ \phi)|\det J_\phi|$ es integrable en $\phi^{-1}(E)$, en cuyo caso se tiene la siguiente fórmula del cambio de variable

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\phi(t))|\det J_\phi(t)|\, dt.$$

En efecto, como $\lambda(E \setminus G) = 0$, es claro que f es integrable en E si, y sólo si, es integrable en $E \cap G$, en cuyo caso

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E\cap G} f(x)\,dx.$$

El teorema del cambio de variable nos asegura ahora que f es integrable en $E \cap G$ si, y sólo si, $(f \circ \phi)|\det J_\phi|$ es integrable en $\phi^{-1}(E \cap G)$, en cuyo caso

$$\int_{E\cap G} f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(E\cap G)} f(\phi(t))\,|\det J_\phi(t)\,|\;dt.$$

Puesto que $\phi^{-1}(E \cap G) = \phi^{-1}(E)$ se sigue de ambos resultados que f es integrable en E si, y sólo si, $(f \circ \phi)|\det J_\phi|$ es integrable en $\phi^{-1}(E)$, en cuyo caso

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\phi(t))\,|\det J_\phi(t)\,|\;dt,$$

lo que prueba la fórmula del cambio de variable de uso habitual en el cálculo de integrales.

Ejemplo 3.2.14.

i. *Coordenadas polares.* Las coordenadas polares en el plano están dadas por el difeomorfismo ϕ de clase C^∞, del abierto

$$\Omega = \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[$$

sobre el abierto

$$G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0):\ x \leq 0\},$$

definido por

$$\phi(\rho,\vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta).$$

Es inmediato comprobar que

$$\det J_\phi(\rho,\vartheta) = \rho > 0$$

para todo $(\rho,\vartheta) \in \Omega$.

En resumen

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos(\vartheta), \\ y & = & \rho\sin(\vartheta), \\ d(x,y) & = & \rho d(\rho,\vartheta), \end{array}\right.$$

y una función medible $f : E \to \mathbb{R}$ en cualquier conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^2$ es integrable si, y sólo si la función $\rho f(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta))$ es integrable en $\phi^{-1}(E)$, en cuyo caso

$$\int_E f(x,y)\,d(x,y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta))\rho\,d(\rho,\vartheta).$$

Ejemplo: área del círculo. Sea $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ con $r > 0$. Se trata de calcular $\lambda(E)$. Se tiene

$$\lambda(E) = \int_E d(x,y) = \int_{]0,r[\times]-\pi,\pi[} \rho \, d(\rho,\vartheta) = \int_0^r \left[\int_{-\pi}^{\pi} \rho \, d\vartheta \right] d\rho = \pi r^2,$$

donde se han utilizado los teoremas de Fubini, del cambio de variable y la regla de Barrow.

ii. *Coordenadas cilíndricas.* Las coordenadas cilíndricas en el espacio están dadas por el difeomorfismo ϕ de clase C^∞, del abierto

$$\Omega = \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[\times \mathbb{R}$$

sobre el abierto

$$G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : \; x \leq 0, \; z \in \mathbb{R}\},$$

definido por

$$\phi(\rho,\vartheta,z) = (\rho\cos(\vartheta), \rho\sin(\vartheta), z).$$

Se tiene que

$$\det J_\phi(\rho,\vartheta,z) = \rho > 0$$

para todo $(\rho,\vartheta,z) \in \Omega$. Esto es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \rho\cos(\vartheta), \\ y & = & \rho\sin(\vartheta), \\ z & = & z, \\ d(x,y,z) & = & \rho d(\rho,\vartheta,z), \end{array} \right.$$

y una función medible $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ en cualquier conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^3$ es integrable si, y sólo si, la función $\rho f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, z)$ es integrable en $\phi^{-1}(E)$, en cuyo caso

$$\int_E f(x,y,z) \, d(x,y,z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, z)\rho \, d(\rho,\vartheta,z).$$

Ejemplo: volumen del cilindro. Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h\}$ con $r,h > 0$. Se trata de calcular $\lambda(E)$. Se tiene

$$\lambda(E) = \int_E d(x,y,z) = \int_{]0,r[\times]-\pi,\pi[\times]0,h[} \rho \, d(\rho,\vartheta,z) =$$

$$\int_0^r \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^h \rho \, dz \right] d\vartheta \right] d\rho = \pi r^2 h.$$

iii. *Coordenadas esféricas (geográficas).* Las coordenadas esféricas en el espacio vienen dadas por el difeomorfismo ϕ de clase C^∞, del abierto

$$\Omega = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\times \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

sobre el abierto

$$G = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : \ x \leq 0, \ z \in \mathbb{R}\},$$

definido por

$$\phi(\rho, \vartheta, \varphi) = (\rho \cos(\vartheta)\cos(\varphi), \rho \sin(\vartheta)\cos(\varphi), \rho \sin(\varphi)).$$

Se tiene entonces que

$$\det J_\phi(\rho, \vartheta, \varphi) = \rho^2 \cos(\varphi) > 0$$

para todo $(\rho, \vartheta, \varphi) \in \Omega$. En este caso

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \rho \cos(\vartheta)\cos(\varphi), \\ y & = & \rho \sin(\vartheta)\cos(\varphi), \\ z & = & \rho \sin(\varphi), \\ d(x,y,z) & = & \rho^2 \cos(\varphi) d(\rho, \vartheta, \varphi) \end{array} \right.$$

y una función medible $f : E \to \mathbb{R}$ en un conjunto medible cualquiera $E \subset \mathbb{R}^3$ es integrable si, y sólo si, la función

$$\rho^2 \cos\varphi f(\rho \cos(\vartheta)\cos(\varphi), \rho \sin(\vartheta)\cos(\varphi), \rho \sin(\varphi))$$

es integrable en $\phi^{-1}(E)$, en cuyo caso

$$\int_E f(x,y,z) d(x,y,z) =$$

$$\int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho \cos(\vartheta)\cos(\varphi), \rho \sin(\vartheta)\cos(\varphi), \rho \sin(\varphi)) \rho^2 \cos(\varphi) d(\rho, \vartheta, \varphi).$$

Ejemplo: volumen de la esfera. Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$ con $r > 0$. Se trata de calcular $\lambda(E)$. Se tiene

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \int_E d(x,y,z) = \int_{]0,r[\times]-\pi,\pi[\times]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \rho^2 \cos\varphi \, d(\rho, \vartheta, \varphi) \\ &= \int_0^r \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos\varphi d\varphi \right] d\vartheta \right] d\rho = \int_0^r \left[\int_{-\pi}^{\pi} 2\rho^2 d\vartheta \right] d\rho \\ &= \int_0^r 4\pi\rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

3.3. Apéndices

3.3.1. Integrales inmediatas

Función	Primitiva	Función	Primitiva
$x^{\alpha},\ \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$f'(x)\Big(f(x)\Big)^{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha+1}\Big(f(x))\Big)^{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$a^{\alpha x},\ (a>0)$	$\dfrac{1}{\alpha \ln a}a^{\alpha x}$	$f'(x)a^{f(x)}$	$\dfrac{1}{\ln a}a^{f(x)}$
$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$

Función	Primitiva	Función	Primitiva
$\operatorname{sen}(\alpha x)$	$-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)$	$f'(x)\sin(f(x))$	$-\cos(f(x))$
$\cos(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$	$f'(x)\cos(f(x))$	$\sin(f(x))$
$\tan(\alpha x)$	$\frac{-1}{\alpha}\ln\lvert\cos(\alpha x)\rvert$	$f'(x)\tan(f(x))$	$-\ln\lvert\cos(f(x))\rvert$
$\cot(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha}\ln\lvert\sin(\alpha x)\rvert$	$f'(x)\cot(f(x))$	$\ln\lvert\sin(f(x))\rvert$
$\dfrac{1}{\cos^2(\alpha x)}$	$\frac{1}{\alpha}\tan(\alpha x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$	$\tan(f(x))$
$\dfrac{1}{\sin^2(\alpha x)}$	$\frac{-1}{\alpha}\cot(\alpha x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sin^2(f(x))}$	$-\cot(f(x))$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$	$\arcsin(f(x))$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\arctan(f(x))$

Función	Primitiva	Función	Primitiva
$\sinh(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x)$	$f'(x)\sinh(f(x))$	$\cosh(f(x))$
$\cosh(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha x)$	$f'(x)\cosh(f(x))$	$\sinh(f(x))$
$\tanh(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha}\ln(\cosh(\alpha x))$	$f'(x)\tanh(f(x))$	$\ln(\cosh(f(x)))$
$\coth(\alpha x)$	$\frac{1}{\alpha}\ln(\vert\sinh(\alpha x)\vert$	$f'(x)\coth(f(x))$	$\ln(\vert\sinh(f(x))\vert$
$\dfrac{1}{\cosh^2(\alpha x)}$	$\frac{1}{\alpha}\tanh(\alpha x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cosh^2(f(x))}$	$\tanh(f(x))$
$\dfrac{1}{\sinh^2(\alpha x)}$	$\frac{-1}{\alpha}\coth(\alpha x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sinh^2(f(x))}$	$-\coth(f(x))$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh}(f(x))$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh}(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)^2-1}}$	$\operatorname{arccosh}(f(x))$

$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\operatorname{arccosh}(x) = \left(\cosh_{\vert\mathbb{R}^+}\right)^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

3.3.2. Cambios de variable habituales

Integrando	Cambio	Nuevo integrando	Nuevos límites
$R(\cos x, \sin x)$	$x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$	$R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}$	$\int_{2\arctan(\alpha+)}^{2\arctan(\beta-)}$
$R(e^x)$	$x = \ln t$	$\frac{R(t)}{t}$	$\int_{\exp(\alpha+)}^{\exp(\beta-)}$
$R(x, \sqrt{1-x^2})$	$x = \sin t$	$R(\sin t, \cos t)\cos t$	$\int_{\arcsin(\alpha+)}^{\arcsin(\beta-)}$
$R(x, \sqrt{x^2-1})$	$x = \cosh t$	$R(\cosh t, \sinh t)\sinh t$	$\int_{\text{arccosh}(\alpha+)}^{\text{arccosh}(\beta-)}$
$R(x, \sqrt{x^2+1})$	$x = \sinh t$	$R(\sinh t, \cosh t)\cosh t$	$\int_{\text{arcsinh}(\alpha+)}^{\text{arcsinh}(\beta-)}$

3.3.3. Integrales por partes habituales

Función	Partes
$P(x)e^x$	$u(x) = P(x),\ v'(x) = e^x$
$P(x)\ln(x)$	$u(x) = \ln(x),\ v'(x) = P(x)$
$P(x)\sin(x)$	$u(x) = P(x),\ v'(x) = \sin(x)$
$P(x)\cos(x)$	$u(x) = P(x),\ v'(x) = \cos(x)$
$P(x)\arcsin(x)$	$u(x) = \arcsin(x),\ v'(x) = P(x)$
$P(x)\arccos(x)$	$u(x) = \arccos(x),\ v'(x) = P(x)$
$P(x)\arctan(x)$	$u(x) = \arctan(x),\ v'(x) = P(x)$
$\left.\begin{array}{c}\sin(x)\\ \cos(x)\end{array}\right\} e^x$	$u(x) = \left\{\begin{array}{c}\sin(x)\\ \cos(x)\end{array}\right.,\ v'(x) = e^x$
$\left.\begin{array}{c}\sin(\alpha x)\\ \cos(\alpha x)\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c}\sin(\beta x)\\ \cos(\beta x)\end{array}\right.$	$u(x) = \left\{\begin{array}{c}\sin(\alpha x)\\ \cos(\alpha x)\end{array}\right.,\ v'(x) = \left\{\begin{array}{c}\sin(\beta x)\\ \cos(\beta x)\end{array}\right.$

3.4. Ejercicios

1. Probar que existen las siguientes integrales y que tienen le valor que se indica en cada caso:

i.
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \ln\left(\frac{2}{1+e}\right).$$

ii.
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{7}{12}\right).$$

iii.
$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

iv.
$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\, dx = \frac{\pi}{6}.$$

v.
$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\, dx = \frac{3\pi + \ln 2}{10}.$$

vi.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4}\, dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$

vii.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}.$$

viii.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \pi.$$

ix.
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x)\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

x.
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\ (\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}).$$

xi.
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\ ,\ \int_{-\pi}^{\pi} (1+\cos x)^2\, dx = 3\pi.$$

xii.
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\text{sen}x|^3 \, dx = \frac{4}{3}.$$

xiii.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^2 \vartheta \, \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{\pi}{16}.$$

xiv.
$$\int_0^1 \left(1-\rho^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \rho \, d\rho = \frac{8}{35}.$$

xv.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

xvi.
$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \ln(1+\sqrt{2}).$$

xvii.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+y)(1+yx^2)} = \frac{\pi}{2(1+y)\sqrt{y}} \ (y>0).$$

xviii.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \pi \, , \, \int_0^1 \ln x \, dx = -1.$$

xiv.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y)(1+yx^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+yx^2} \right) dy = \frac{2\ln x}{x^2-1} \ \ (x \neq \pm 1).$$

2. Estudiar la integrabilidad de las siguientes funciones:

i. $\dfrac{x}{e^x-1} \ \forall x \in]0,+\infty[$.

ii. $x^\rho \ln x \ \forall x \in]0,+\infty[\ (\rho \in \mathbb{R})$.

iii. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) \ \forall x \in]0,1[$.

iv. $x^\alpha (1-x)^\beta \ \forall x \in]0,1[\ (\alpha,\beta \in \mathbb{R})$.

v. $\ln(x)\ln(1-x) \ \forall x \in]0,1[$.

vi. $x^{\rho}\operatorname{sen}(x)\ \forall x \in]1,+\infty[$ ($\rho \in \mathbb{R}$).

3. Estudiar la integrabilidad de las siguientes funciones:

i.
$$f(x,y) = e^{-xy} - 2e^{-2xy} \text{ en }]0,1[\times]1,+\infty[.$$

ii.
$$f(x,y) = (x-y)e^{-(x-y)^2} \text{ en }]0,+\infty[\times]0,+\infty[.$$

iii.
$$f(x,y) = \frac{1-(xy)^2}{(2+(xy)^2)^2} \text{ en }]0,1[\times]0,+\infty[.$$

iv.
$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x-y}\right) \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}.$$

v.
$$f(x,y) = e^{-(x+y)} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x,\ 0<y<x\}.$$

vi.
$$f(x,y) = e^{-xy} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x,\ 0<y<\frac{1}{x}\}.$$

vii.
$$f(x,y) = e^{-|x-y|} \text{ en }]-1,1[\times\mathbb{R}.$$

viii.
$$f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x,\ 0<y<x\}.$$

ix.
$$f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{(1+y^2)\sqrt{\sin(x)}} \text{ en }]3,1[\times\mathbb{R}^+.$$

x.
$$f(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}} \text{ en } \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \ (\alpha\in\mathbb{R}).$$

xi.
$$\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\alpha}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\} \ (\alpha\in\mathbb{R}).$$

xii.
$$\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\alpha}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x^2+y^2<1\} \ (\alpha\in\mathbb{R}).$$

xiii.
$$\frac{\sin(x)\ \sin(y)}{(x^2+y^2)^{\alpha}} \ \text{ en } \ \mathbb{R}^2.$$

4. Demostrar la integrabilidad y calcular la correspondiente integral de las siguientes funciones:

i.
$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \ \text{ en } \ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y^2\le 2x,\ 0\le x\le 2\}.$$

ii.
$$\sqrt{xy} \ \text{ en } \ \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y, \left(\frac{2x+y}{4}\right)^2\le\frac{x}{6}\right\}.$$

iii.
$$\frac{2xy(2-3x)}{x^2+2y^2} \ \text{ en } \ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x,\ 0<y,\ y^2\le\frac{1}{2}-x\}.$$

iv.
$$x+y \ \text{ en } \ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y^2\le x+2,\ x^2\le y+2\}.$$

v.
$$y^2 \ \text{ en } \ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le R^2\}.$$

vi.
$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \ \text{ en } \ \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1,\ 0<y\right\}.$$

vii.
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \ \text{ en } \ \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1\right\}.$$

viii.
$$\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \ \text{ en } \ \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ 0<y<\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

ix.
$$\frac{1}{(1+x+y+z)^3} \ \text{ en } \ \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\ x+y+z\le 1\right\}.$$

x.
$$x^2+y^2+z^2 \ \text{ en } \ \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le x,\ 0\le y,\ 0\le z,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{x}{c}\le 1\right\}\ (a,b,c>0).$$

xi.
$$e^{-(x^2+y^2)}$$
en

- $\mathbb{R}^2$.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1\}$.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x,\ 0 < y\}$.
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 1,\ |x| < y\}$.

xii.
$$\frac{1}{1+x^2+y^2} \ \text{ en } \ ]0,+\infty[\times]0,1[.$$

xiii.
$$xye^{-(x^2+y^2)} \ \text{ en } \ \mathbb{R}^2.$$

xiv.
$$\frac{1}{(1+y)(1+yx^2)} \ \text{ en } \ ]0,+\infty[\times]0,+\infty[.$$

xv.
$$e^{-x-y} \ \text{ en } \ ]0,+\infty[\times]0,+\infty[.$$

xvi.
$$e^{-x}\sin(xy) \ \text{ en } \ ]0,+\infty[\times]0,1[.$$

xvii.
$$e^{-x+2y} \ \text{ en } \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < y < 1\}.$$

xviii.
$$\sqrt{x+y} \ \text{ en } \ ]0,1[\times]0,1[.$$

xix.
$$x-y \ \text{ en } \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 < 1\}.$$

xx.
$$e^{-x-y} \ \text{ en } \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < y < x\}.$$

xxi.
$$e^{-xy} \ \text{ en } \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x,\ 0 < y < \frac{1}{x}\}.$$

xxii.
$$e^{-|x-y|} \ \text{ en } \ ]-1,1[\times\mathbb{R}^2.$$

xxiii.
$$\frac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{1-x}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ 0<y<x\}.$$

xxiv.
$$\sin(x^2+y^2) \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}.$$

xxv.
$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<x^2+y^2+z^2<1\}.$$

xxvi.
$$\ln(x^2+y^2) \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x,y,a^2<x^2+y^2<b^2\}.$$

xxvii.
$$ze^{-(x^2+y^2)} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le 1,\ 0<z<1\}.$$

xxviii.
$$z\sqrt{x^2+y^2} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 1\le x^2+y^2\le 2,\ 1\le z<2\}.$$

xxix.
$$ze^{\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1\}.$$

xxx.
$$\frac{e^{x+y}}{x-y} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<x,\ 0<x<1\}.$$

xxxi.
$$z \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<x,y,z,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1\}.$$

xxxii.
$$x^2\sin(xy) \text{ en } [0,\pi]\times[0,1].$$

xxxiii.
$$\frac{1}{\sqrt{x+y+z+2}} \text{ en } [0,2]\times[0,1]\times[-1,4].$$

xxxiv.
$$2\sqrt{x}-3y^2 \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le \sqrt[4]{x}\}.$$

xxxv.
$$\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ 0<y<x\}.$$

xxxvi.
$$\frac{yz}{x} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<y,z,\ x^2+y^2<x,\ x^2+y^2+z^2<1\}.$$

xxxvii.
$$\frac{(x+y)^2}{(x+2y+1)(y+1)} \text{ en } [0,2]\times[0,1].$$

xxxviii.
$$e^{\frac{y-x}{y+x}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x,y,\ x+y<1\}.$$

xxxix.
$$xyz \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1\}.$$

xl.
$$z \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1,\ x^2+y^2-z^2<0, 0<z\}.$$

xli.
$$\frac{1}{x^2+y^2+(z-3)^2} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1\}.$$

xlii.
$$x-y \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x,y,\ x^2+y^2<1\}.$$

xliii.
$$(x^2+y^2)^z \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<x^2+y^2<1,\ 0<y,\ 0<z<1\}.$$

xliv.
$$x^2+y^2+z^2 \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1\}.$$

xlv.
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<x,y,z,\ x^2+y^2+z^2<1\}.$$

xlvi.
$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 1<x^2+y^2<2,\ 1<z<2\}.$$

xlvii.
$$(x^2+y^2)z^2 \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2<1,\ -1<z<1\}.$$

xlviii.
$$x^2y^2 \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<y^2,\ 0<y<2+x,\ x<1\}.$$

xlix.
$$\frac{y}{\sqrt{x}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ 0<y<1\}.$$

l.
$$\frac{xz^3}{y^2-1} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<x,y,z,\ x^2+y^2+z^2<1\}.$$

li.
$$xe^{-\frac{x^2}{y}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x,\ 1<y<2,\ x^2<y\}.$$

lii.
$$\frac{1}{(1+x+y+z)^3} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<x,y,z,\ x+y+z<1\}.$$

liii.
$$\frac{3x^2-2y^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^5}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x^2+y^2<1\}.$$

liv.
$$\frac{1}{\sqrt[4]{(4x^2+y^2)^3}} \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2<1\}.$$

lv.
$$\frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \text{ en }]0,+\infty[\times]0,1[\times]0,1[.$$

lvi.
$$\frac{yz}{x} \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<x,y,z,\ y<x,\ x^2+y^2<z,\ x^2+y^2+z^2<2\}.$$

lvii.
$$x \text{ en } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1<x^2+y^2<2,\ x^2<y\}.$$

lviii.
$$z \text{ en } \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 1<x^2+y^2+z^2<2,\ 0<z<x^2+y^2\}.$$

5. Calcular la medida de los siguientes conjuntos:

i.
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le(1-z)^2,\ x^2+y^2\le\frac{z}{2}\}.$$

ii.
$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 3,\ x^2+y^2-z^2\le 1,\ 0\le z\}.$$

iii.
$$\{x\in\mathbb{R}^N:\ x=a+\sum_{k=1}^{N}t_ke_k,\ 0\le t_k\le 1,\ k=1,\dots,N\},$$

donde $a,e_1,\dots,e_N\in\mathbb{R}^N$.

iv.
$$\{x\in\mathbb{R}^N:\ x=a+\sum_{k=1}^{N}t_ke_k,\ 0\le t_k,\ \sum_{k=1}^{N}t_k\le 1,\ k=1,\dots,N\},$$

donde $a,e_1,\dots,e_N\in\mathbb{R}^N$.

v. Bóveda de Viviani:

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{1}{4},\ x^2+y^2+z^2\leq 1,\ 0\leq z\right\}.$$

vi.

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<x,y,z,\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}<1\}.$$

vii. Sólidos de revolución. Sea $E\subset]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ un conjunto medible. Consideremos el conjunto

$$S=\left\{(x,y,z)\mathbb{R}^3:\ \left(\sqrt{x^2+y^2},z\right)\in E\right\}$$

(sólido de revolución obtenido al girar el conjunto E contenido en el plano XZ en torno al eje OZ). Probar que S es medible y que

$$\lambda(S)=2\pi\int_E x\,d(x,z).$$

Aplicación: probar que

- El volumen del toro engendrado por la rotación en torno al eje OZ del círculo $(x-1)^3+(z-1)^2\leq\frac{1}{4}$ (salvavidas) es $\frac{\pi^2}{2}$.
- El conjunto
$$E=\left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2:\ 1<x,\ 0<z<\frac{1}{x^2}\right\}$$
tiene área uno y que el sólido engendrado al rotar dicho conjunto en torno al eje OZ tiene volumen infinito.

Índice alfabético