Apuntes de Análisis Funcional

Rafael Payá Albert

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Tema 1

Conceptos básicos en espacios normados

En lo que sigue trabajaremos siempre con espacios vectoriales reales o complejos. Usaremos la letra $\mathbb{K}$ para denotar indistintamente al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

1.1. Espacios normados y espacios de Banach

Una **seminorma** en un espacio vectorial X es una función $\nu : X \to \mathbb{R}$ verificando

(i) $\nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$
(ii) $\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X)$ *(Desigualdad triangular)*.

Se deduce claramente de las condiciones anteriores que $\nu(0) = 0$ y que $\nu(x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$, así que *una seminorma no puede tomar valores negativos.* Cuando la igualdad $\nu(x) = 0$ sólo se verifica para $x = 0$ decimos que ν es una norma. Se suele escribir entonces $\|x\|$ en lugar de $\nu(x)$. Así pues, una **norma** en X es una función $x \longmapsto \|x\|$, de X en $\mathbb{R}$, verificando

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$
(ii) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad (x, y \in X)$
(iii) $\|x\| = 0 \ \Rightarrow\ x = 0.$

Un **espacio normado** es un espacio vectorial X dotado de una norma $\|\cdot\|$.

En cualquier espacio normado X consideramos siempre la **distancia** d definida por

$$d(x,y) = \|y - x\| \qquad (x, y \in X).$$

Es fácil comprobar, usando las propiedades de la norma, que en efecto d es una distancia en X. Obsérvese que d permite a su vez recuperar la norma, ya que

$$\|x\| = d(0,x) \quad (x \in X).$$

Observemos también que la distancia d tiene un buen comportamiento con respecto a la estructura de espacio vectorial; más concretamente, es *invariante por traslaciones:*

$$d(x+z,y+z) = d(x,y) \quad (x,y,z \in X)$$

y es *invariante por giros y homogénea por homotecias,* ya que

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x,y \in X)$$

Podemos pues manejar en un espacio normado cualquier noción que tenga sentido en los espacios métricos. Recordemos algunas de estas nociones:

- Es fácil comprobar que un subconjunto A de un espacio normado X está *acotado* si, y sólo si, existe una constante positiva M tal que $\|a\| \leqslant M$ para todo $a \in A$.
- También es claro que una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X *converge* a un $x \in X$ cuando $\{\|x_n - x\|\} \to 0$, mientras que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* cuando para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número natural n_0 tal que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ para $n,m \geqslant n_0$.

Cuando la distancia d, asociada a la norma $\|\cdot\|$ de un espacio X, es completa, es decir, cuando toda sucesión de Cauchy es convergente, decimos que la norma $\|\cdot\|$ es **completa** o también que el espacio normado X es completo. Un **espacio de Banach** es un espacio normado completo. Un poco más adelante veremos ejemplos en abundancia de espacios normados no completos y de espacios de Banach.

De manera más general, dado un subconjunto A de un espacio normado X, decimos que A es **completo** cuando toda sucesión de Cauchy de elementos de A converge a un elemento de A; en tal caso, es inmediato comprobar que A es cerrado en X. El recíproco se da cuando el propio X es completo, es decir: si A es un subconjunto de un espacio de Banach X, entonces A *es completo si, y sólo si, A es cerrado en X.*

La discusión anterior tiene especial interés cuando trabajamos con subespacios. Es claro que un subespacio M de un espacio normado X es a su vez un espacio normado mediante la restricción a M de la norma de X. Si M es un espacio de Banach, sabemos que M ha de ser cerrado en X. En sentido contrario, un subespacio M de un espacio de Banach X es un espacio de Banach si, y sólo si, M es cerrado en X. Contra lo que la intuición geométrica parece indicar, debe quedar claro que un subespacio de un espacio normado, no tiene por qué ser cerrado.

Recordemos que un espacio métrico siempre puede verse como subconjunto denso de un espacio métrico completo, su *completación.* Pues bien, si X es un espacio normado y llamamos $\hat{X}$ a su completación como espacio métrico, es rutinario comprobar que tanto las operaciones de X (suma y producto por escalares) como su norma, pueden extenderse de manera única a $\hat{X}$ convirtiéndolo en un espacio de Banach, del que X queda como subespacio denso; en resumen, todo espacio normado X puede verse como subespacio denso de un espacio de Banach $\hat{X}$, su **completación**. Más adelante veremos una construcción muy elegante de la completación de un espacio normado.

1.2. Topología de la norma

En cualquier espacio normado X, la topología asociada a su distancia suele denominarse **topología de la norma**. Salvo que se especifique lo contrario, cualquier noción topológica que manejemos en un espacio normado se refiere siempre a la topología de la norma.

Así pues, un conjunto $A \subseteq X$ es *abierto* cuando para cada $x_0 \in A$ se puede encontrar una bola abierta de centro x_0 y radio $r > 0$ contenida en A. Por tanto, para cualquier $x_0 \in X$, las bolas abiertas de centro x_0 y radios positivos forman una base de entornos de x_0. Es claro que igual ocurre con las correspondientes bolas cerradas. El manejo de estos entornos básicos resulta especialmente cómodo; en efecto, consideremos la **bola unidad** de X, esto es, el conjunto

$$B = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}.$$

Es claro que la bola cerrada de centro x_0 y radio $r > 0$ puede escribirse como $x_0 + rB$, luego cualquier bola cerrada se obtiene a partir de la bola unidad mediante una homotecia y una traslación. Análoga situación se tiene, obviamente, usando bolas abiertas: si llamamos U a la **bola abierta unidad** de X, esto es,

$$U = \{x \in X : \|x\| < 1\},$$

es claro que $x_0 + rU$ es la bola abierta de centro x_0 y radio r.

Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un mismo espacio vectorial X son **equivalentes** cuando dan lugar a la misma topología. Usando que la bola unidad para cada una de ellas ha de ser entorno de cero en la topología asociada a la otra, obtenemos inmediatamente que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ *son equivalentes si, y sólo si, existen dos constantes estrictamente positivas* α *y* β *tales que*

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1 \quad (x \in X).$$

Como consecuencia inmediata obtenemos que *dos normas equivalentes dan lugar a los mismos subconjuntos acotados y a las mismas sucesiones de Cauchy.* Por tanto, *cualquier norma equivalente a una norma completa también es completa.*

La topología de la norma muestra también un buen comportamiento respecto a las operaciones de espacio vectorial. Más concretamente, para cualquier espacio normado X:

- La aplicación *suma:* $(x,y) \longmapsto x+y$, de $X \times X$ en X es continua (considerando naturalmente en $X \times X$ la topología producto)
- La aplicación *producto por escalares* $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$, de $\mathbb{K} \times X$ en X también es continua (considerando ahora en $\mathbb{K}$ su topología usual y en $\mathbb{K} \times X$ la topología producto).

Un **espacio vectorial topológico** (abreviadamente **EVT**) es, por definición, un espacio vectorial X dotado de una topología que hace que se verifiquen las dos afirmaciones anteriores. Así pues, cualquier espacio normado es un ejemplo de EVT. Un espacio vectorial $X \neq \{0\}$, con la topología trivial (los únicos subconjuntos abiertos son el vacío y el propio X) es un ejemplo (trivial) de EVT cuya topología no procede de una norma. Obviamente existen ejemplos más interesantes.

Destacamos un hecho importante que se verifica en cualquier EVT y es fácil de comprobar: *el cierre de un subespacio de un EVT vuelve a ser un subespacio.*

1.3. Series.

Las nociones conocidas sobre convergencia de series numéricas pueden extenderse fácilmente a series de elementos de un espacio normado. A cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio normado X asociamos la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$ definida naturalmente por $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Cuando la sucesión $\{s_n\}$ converge, decimos que la **serie** $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es **convergente** y definimos la **suma** de dicha serie por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Cuando la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ converge para cualquier permutación σ del conjunto de los números naturales, decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es **incondicionalmente convergente**; se puede demostrar que, en tal caso, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ no depende de la permutación σ que utilicemos. Finalmente decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es **absolutamente convergente** cuando la serie numérica $\sum_{n\geqslant 1} \|x_n\|$ es convergente; por tratarse de una serie de términos positivos, esta última afirmación suele expresarse simplemente escribiendo $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. A continuación enunciamos una útil caracterización de la complitud de un espacio normado en términos de series:

Proposición. *Un espacio normado X es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente de elementos de X es convergente.*

Puesto que una serie convergente de términos positivos es siempre incondicionalmente convergente, deducimos que, en cualquier espacio de Banach, toda serie absolutamente convergente es, de hecho, incondicionalmente convergente. Así pues, siempre en un espacio de Banach, la relación entre los distintos tipos de convergencia es la siguiente:

$$\textit{convergencia absoluta} \implies \textit{convergencia incondicional} \implies \textit{convergencia}$$

Incluso en $\mathbb{K}$ disponemos en abundancia de series convergentes que no son incondicionalmente convergentes. De hecho, sabemos que en $\mathbb{K}$ la convergencia incondicional equivale a la absoluta. Enseguida vamos a encontrar multitud de ejemplos de series incondicionalmente convergentes en espacios de Banach, que no son absolutamente convergentes. Un importante teorema de la teoría de series en espacios de Banach (el Teorema de Dvoretsky-Rogers) afirma que en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita puede siempre encontrarse una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente.

Tema 2

Ejemplos de espacios normados

A continuación presentamos una amplia colección de espacios que permiten ilustrar los conceptos y resultados expuestos hasta ahora, así como los que van a aparecer más adelante. Empezamos con unas desigualdades que tendrán un papel clave en lo que sigue:

2.1. Desigualdades de Young, Hölder y Minkowski

Dado un número real p mayor que 1 (en adelante escribiremos simplemente $1 < p < \infty$) definimos su exponente conjugado p^* mediante la igualdad $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ y observamos que también $1 < p^* < \infty$, así como que la relación entre p y p^* es simétrica: $(p^*)^* = p$.

Pues bien, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$ se tiene:

$$a\,b \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*} \quad \textit{(Desigualdad de Young).}$$

La prueba de esta desigualdad es una fácil consecuencia de la convexidad de la función exponencial real. De la desigualdad de Young se deduce sin gran dificultad la siguiente:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k\, b_k \;\leqslant\; \left(\sum_{k=1}^{N} a_k{}^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k{}^{p^*}\right)^{1/p^*} \qquad \textit{(Desigualdad de Hölder)},$$

válida para $1 < p < \infty$, cualquier $N \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}^+$.

A partir de la desigualdad de Hölder no es difícil deducir:

$$\left(\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \;\leqslant\; \left(\sum_{k=1}^{N} a_k{}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} b_k{}^p\right)^{1/p} \quad \textit{(Desigualdad de Minkowski)},$$

igualmente válida para $1 < p < \infty$, $N \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}^+$.

2.2. Algunos espacios de dimensión finita

Para $1 \leqslant p < \infty$ y $x = \big((x(1), x(2), \ldots, x(N)\big) \in \mathbb{K}^N$, definimos:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{1/p}$$

Merece la pena admitir también el valor $p = \infty$, en cuyo caso escribimos

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(k)| : k = 1, 2, \ldots, N\}.$$

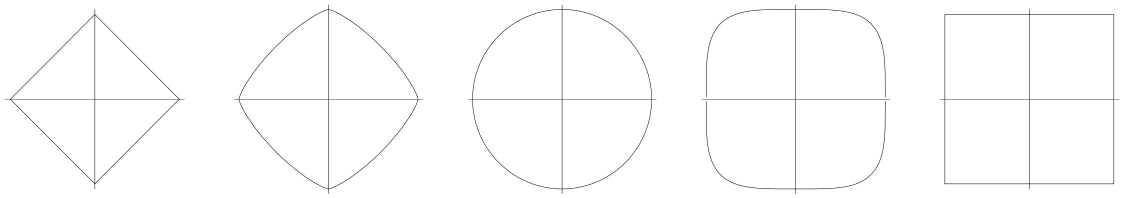
La notación se justifica por el hecho de que $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{K}^N$.

Para comprobar que $\|\cdot\|_p$ es una norma $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, dos de las condiciones a verificar son evidentes y sólo la desigualdad triangular merece comentario. Tanto para $p = 1$ como para $p = \infty$ dicha desigualdad es inmediata, mientras que para $1 < p < \infty$ es claramente equivalente a la desigualdad de Minkowski. Observemos que la desigualdad de Hölder toma la forma:

$$\sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \;\leqslant\; \|x\|_p \; \|y\|_{p^*} \quad (1 < p < \infty,\; x, y \in \mathbb{K}^N)$$

y si adoptamos el convenio de que $p^* = \infty$ cuando $p = 1$ y (coherentemente) $p^* = 1$ cuando $p = \infty$, la desigualdad resulta también cierta para $p = 1, \infty$.

La siguientes figuras muestran la bola unidad en $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|\cdot\|_p$ para distintos valores de p:



$p = 1$ $\quad 1 < p < 2$ $\quad p = 2$ $\quad p > 2$ $\quad p = \infty$

Todas las normas recién definidas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes, como se deduce de las siguientes desigualdades de comprobación inmediata:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\,\|x\|_\infty \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty,\; x \in \mathbb{K}^N).$$

Así pues, todas estas normas generan la topología producto en $\mathbb{K}^N$ y todas ellas son completas. El espacio de Banach que obtenemos dotando a $\mathbb{K}^N$ de la norma $\|\cdot\|_p$ suele denotarse por l_p^N, notación que se entenderá mejor enseguida.

2.3. Algunos espacios de sucesiones

Consideremos el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cuyos elementos son todas las sucesiones de escalares, es decir, todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con operaciones definidas puntualmente o, si se quiere, término a término:

$$[x+y](n) = x(n)+y(n); \ \ [\lambda x](n) = \lambda x(n) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x,y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \lambda \in \mathbb{K})$$

Vamos a considerar una amplia gama de subespacios de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que, dotados de la norma apropiada en cada caso, se convertirán en importantes ejemplos de espacios de Banach.

2.3.1. Los espacios $l_p \ \ (1 \leqslant p < \infty)$

Fijado $1 \leqslant p < \infty$, denotaremos por l_p al conjunto de las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum_{n \geqslant 1} |x(n)|^p$ es convergente, abreviadamente:

$$l_p = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\right\} \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

Por ejemplo, l_1 está formado por los términos generales de las series de escalares absolutamente convergentes.

Pasando al límite cuando $N \to \infty$ en la desigualdad de Minkowski, obtenemos que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \ \leqslant\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k{}^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k{}^p\right)^{1/p}$$

para cualesquiera sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ de números reales positivos y $1 \leqslant p < \infty$. A partir de esta *desigualdad de Minkowski para series*, es fácil deducir que l_p es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y que definiendo

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p} \qquad (x \in l^p),$$

se obtiene una norma en l_p.

Vamos ahora a probar que l_p *es un espacio de Banach.* Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en l_p y, fijado $k \in \mathbb{N}$, consideremos la sucesión de escalares $\{x_n(k)\}$. Para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$ es claro que $|x_n(k) - x_m(k)| \leqslant \|x_n - x_m\|_p$, así que $\{x_n(k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego convergente. Definiendo, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x(k) = \lim_{n\to\infty} x_n(k)$ obtenemos una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Nuestro objetivo es comprobar que $x \in l_p$ y que $\{\|x_n - x\|_p\} \to 0$, concluyendo la demostración.

Para ello, empezamos fijando $\varepsilon > 0$ y usando que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en l_p para encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n,m \geqslant n_0$ se tenga $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$. Por tanto, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, tendremos

$$\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_m(k)|^p \ \leqslant\ (\|x_n - x_m\|_p)^p \ <\ \varepsilon^p.$$

Fijado un natural $n \geqslant n_0$, la desigualdad anterior, válida para $m \geqslant n_0$ nos permite escribir

$$\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_m(k)|^p \leqslant \varepsilon^p$$

y, puesto que $N \in \mathbb{N}$ era arbitrario, deducimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^p \leqslant \varepsilon^p$$

Hemos probado que $x_n - x \in l_p$, luego también $x = x_n - (x_n - x) \in l_p$, pero entonces la última desigualdad nos dice que $\|x_n - x\|_p \leqslant \varepsilon$. Como esto último es válido para $n \geqslant n_0$, tenemos que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x, como queríamos.

Analizamos ahora brevemente la relación entre los espacios l_p para distintos valores de p. Si tomamos $1 \leqslant p < q < \infty$ y fijamos una sucesión $x \in l_p$, como quiera que $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$, tendremos $|x(n)|^q \leqslant |x(n)|^p$ para n suficientemente grande, con lo que el criterio de comparación para series de términos positivos nos dice que $x \in l_q$. La implicación contraria no es cierta: la sucesión $\{n^{1/p}\}$ está en l_q pero no en l_p. En resumidas cuentas, el conjunto l_p se agranda estrictamente al aumentar p.

2.3.2. Los vectores unidad en l_p

Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por e_n a la sucesión cuyo n-ésimo término es 1 y los demás se anulan, es decir, $e_n(n) = 1$ y $e_n(k) = 0$ para $k \neq n$. Fijado $1 \leqslant p < \infty$ es obvio que $e_n \in l_p$, de hecho con $\|e_n\|_p = 1$ y decimos que e_n es el n-ésimo **vector unidad** en l_p. Así pues, tenemos en l_p la sucesión $\{e_n\}$ de vectores unidad que claramente son linealmente independientes, lo que prueba que l_p tiene dimensión infinita. Vamos ahora a observar con detenimiento el subespacio engendrado por los vectores unidad.

En general, dado un subconjunto E de un espacio vectorial X, denotaremos por $\operatorname{Lin} E$ al subespacio vectorial de X engendrado por E, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de E. Volviendo al caso que nos interesa, para $X = l_p$ podemos empezar fijando un $N \in \mathbb{N}$ y observando el subespacio engendrado por los N primeros vectores unidad, es decir, $X_N = \operatorname{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$. Es evidente que X_N, con la norma que hereda de l_p, se identifica totalmente con el espacio normado que hemos llamado l_p^N. Podemos por tanto ver cada espacio l_p^N como un subespacio N-dimensional de l_p, lo que justifica hasta cierto punto la notación.

Consideremos ahora el subespacio de l_p engendrado por todos los vectores unidad, es decir, $\operatorname{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, que evidentemente tiene dimensión infinita numerable. Este espacio vectorial, un subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que obviamente es el mismo para todos los valores de p, se denota por $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Definiendo el **soporte** de una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$, es claro que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ está formado por las sucesiones **de soporte finito**, es decir, sucesiones cuyos términos se anulan todos a partir de uno en adelante.

Vamos a ver ahora que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es denso en cada uno de los espacios l_p con $1 \leqslant p < \infty$. Para ello basta pensar en la forma más natural de aproximarnos a una sucesión mediante sucesiones de soporte finito. Más concretamente, dado un $x \in l_p$ podemos considerar la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, e_n$, una serie de vectores de l_p. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la n-ésima suma parcial de dicha serie es una sucesión de soporte finito, cuyos n primeros términos coinciden con los de x y el resto se anulan. Como la intuición nos hace pensar, la serie dada converge efectivamente a x, pues para $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} x(k)\, e_k\Big\|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)|^p,$$

y usando que el resto de una serie convergente ha de tender a cero, deducimos que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n \quad (x \in l_p\,,\ 1 \leqslant p < \infty),$$

como queríamos.

Queda así de manifiesto que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es un subespacio denso de l_p que no es el total. Dicho de manera equivalente, si consideramos en $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ la norma que hereda de l_p, tenemos un ejemplo de espacio normado no completo, cuya completación es precisamente l_p. Abundando en la misma idea, tomemos $1 \leqslant p < q < \infty$ y veamos a l^p como un subespacio vectorial de l_q; entonces en l_p, además de la norma propia $\|\cdot\|_p$, que le convierte como sabemos en un espacio de Banach, disponemos de la norma que hereda de l_q, que podemos seguir llamando $\|\cdot\|_q$. Con esta segunda, l_p es un subespacio propio denso en l_q, ya que contiene al subespacio denso $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$; por tanto, es también un espacio normado no completo cuya completación vuelve a ser l_q. Deducimos que en l_p las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$ no son equivalentes, puesto que una es completa y otra no.

Volviendo al desarrollo en serie obtenido anteriormente, con muy poco esfuerzo adicional se puede comprobar que, siempre para $1 \leqslant p < \infty$ y cualquier $x \in l_p$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, e_n$ converge incondicionalmente. Por otra parte, es claro que $\|x(n)\, e_n\|_p = |x(n)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego dicha serie convergerá absolutamente si, y sólo si $x \in l_1$. Por tanto, tomando $1 < p < \infty$ y una sucesión $x \in l_p$ tal que $x \notin l_1$, deducimos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, e_n$ converge incondicionalmente en l_p pero no converge absolutamente. Por ejemplo, para $1 < p < \infty$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{e_n}{n}$ converge incondicionalmente en l_p pero no converge absolutamente.

2.3.3. Bases de Schauder y espacios de Banach separables

Observemos la sucesión $\{e_n\}$ de los vectores unidad en cualquiera de los espacios l_p con $1 \leqslant p < \infty$. Se trata, como ya se ha dicho, de un conjunto de vectores linealmente independientes, pero no forman una base algebraica de l_p, el subespacio que engendran es $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, que es denso en l_p pero no es el total. Sin embargo, cada vector $x \in l_p$ se expresa como una especie de combinación lineal infinita de los términos de nuestra sucesión, más concretamente, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$, serie que converge (incluso incondicionalmente) en la topología de la norma del espacio l_p. Además, no es difícil convencerse de que dicha expresión es única, es decir, si para una sucesión de escalares $\{\alpha_n\}$ tuviésemos también $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, se tendría obligadamente $\alpha_n = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Podríamos decir que la sucesión $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ se comporta como una especie de base de l_p, siempre que no nos limitemos a hacer combinaciones lineales finitas sino que admitamos sumas de series del tipo que venimos manejando. Ello motiva la siguiente definición.

Se dice que una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de Banach X es una **base de Schauder** de X cuando para cada vector $x \in X$ existe una única sucesión $\{\lambda_n\}$ de escalares tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$$

Así pues, nuestras consideraciones anteriores se resumen diciendo que $\{e_n\}$ es una base de Schauder de l_p para $1 \leqslant p < \infty$. Se dice que $\{e_n\}$ es la **base de vectores unidad** de l_p. El concepto de base de Schauder es muy útil en el estudio de los espacios de Banach.

Notemos que los vectores de una base de Schauder $\{u_n\}$, en cualquier espacio de Banach X, siempre son linealmente independientes. El subespacio engendrado, $Y = \operatorname{Lin}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, tiene dimensión infinita numerable, luego como espacio vectorial es isomorfo a $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$; claramente Y es denso en X y se comprueba sin mucha dificultad que no puede coincidir con X. Así pues, todo espacio de Banach que admita una base de Schauder contiene un subespacio denso de dimensión numerable. Deducimos que X, como espacio topológico, es **separable**, es decir, existe un conjunto numerable denso en X. En efecto, sea Δ un conjunto numerable denso en $\mathbb{K}$: si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ podemos tomar $\Delta = \mathbb{Q}$; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sirve $\Delta = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Consideramos el conjunto de las combinaciones lineales de términos de la sucesión $\{u_n\}$ con coeficientes en Δ:

$$E = \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \delta_k u_k : N \in \mathbb{N}, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N \in \Delta \Big\}.$$

Es fácil ver que E es un subconjunto numerable de Y; además, usando que Δ es denso en $\mathbb{K}$, se comprueba también sin dificultad que toda combinación lineal de términos de la sucesión $\{u_n\}$ se aproxima por elementos de E, esto es, que Y está contenido en el cierre de E. Puesto que Y era denso en X, deducimos que también E es denso en X y tenemos el conjunto numerable denso en X que buscábamos. Obsérvese que en el último razonamiento no hemos usado la complitud del espacio X, sino solamente el hecho de que Y tiene dimensión numerable y es denso en X. Así pues, *cualquier espacio normado que contenga un subespacio denso de dimensión numerable es separable.* El recíproco es evidente, si un conjunto numerable E es denso en un espacio normado X, entonces $\operatorname{Lin} E$ es un subespacio de dimensión numerable denso en X. Resaltemos que los espacios l_p con $1 \leqslant p < \infty$ son espacios de Banach separables.

Durante algún tiempo, en todos los espacios de Banach separables conocidos se disponía de una base de Schauder. Ello motivó a Stefan Banach a preguntar en 1932 si en todo espacio de Banach separable se puede encontrar una base de Schauder. El problema fue resuelto en 1973 por el matemático sueco Per Enflo, construyendo una gama de espacios de Banach separables sin base de Schauder.

2.3.4. Espacios de sucesiones acotadas

En la discusión anterior hemos excluido siempre el caso $p = \infty$, que ahora vamos a estudiar. Recordemos que l_∞^N denotaba el espacio de Banach que se obtiene dotando a $\mathbb{K}^N$ de la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$. Está claro cómo podemos extender esta norma haciendo que tenga sentido para una sucesión de escalares: la sucesión deberá estar acotada y, como pudiera no tener un término con módulo máximo, usamos el supremo. Denotaremos por l_∞ el subespacio de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ formado por todas las sucesiones acotadas de escalares, abreviadamente:

$$l_\infty = \big\{x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\big\}.$$

Se comprueba sin dificultad que l_∞, con la norma definida por

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \qquad (x \in l_\infty)$$

es un espacio de Banach.

Hacemos aquí un inciso para comentar que, al igual que la desigualdad de Minkowski, también la desigualdad de Hölder tiene su versión para series. Concretamente, tomando $x \in l_p$ e $y \in l_{p^*}$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$ y los convenios ya adoptados de que $p^* = \infty$ cuando $p = 1$ y $p^* = 1$ cuando $p = \infty$, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|\,|y(n)| \;\leqslant \|x\|_p \;\|y\|_{p^*}\,.$$

Subespacios destacados de l_∞ son el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero y el espacio c de las sucesiones convergentes. Es fácil comprobar que ambos son subespacios cerrados de l_∞ y por tanto espacios de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$ que ambos heredan de l_∞. Observemos también que c se obtiene añadiendo una recta a c_0 o, con más precisión, c_0 es un hiperplano en c. Concretamente, si denotamos por u a la sucesión constantemente igual a 1, es claro que $c = c_0 \oplus \mathbb{K}u$.

Prestemos atención a los vectores unidad $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ que obviamente están todos en c_0. El subespacio que engendran (que como espacio vectorial sigue obviamente siendo $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$), visto ahora como subespacio de c_0, suele denotarse por c_{00}. Pues bien, otra vez c_{00} es denso en c_0; más aún, $\{e_n\}$ es una base de Schauder de c_0, ya que es fácil comprobar que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,e_n \quad (x \in c_0),$$

la serie converge incondicionalmente (pero no siempre absolutamente) y se tiene también la unicidad del desarrollo. En particular, c_0 vuelve a ser un espacio de Banach separable. No es difícil comprobar que, añadiendo a $\{e_n\}$ la sucesión u constantemente igual a 1, o más rigurosamente, tomando $e_0 = u$, se obtiene una base de Schauder $\{e_n : n \geqslant 0\}$ del espacio c de las sucesiones convergentes, espacio que también resulta ser separable.

Por el contrario l_∞ no es separable. Para comprobarlo, como casi siempre que se quiere probar que un espacio métrico no es separable, bastará encontrar un subconjunto no numerable

$A \subset l_\infty$ tal que, para algún $\delta > 0$, se tenga $\|a-b\| \geqslant \delta$ cualesquiera sean $a, b \in A$ con $a \neq b$. Pues bien, sea $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ el conjunto de todas las partes de $\mathbb{N}$ que, como bien sabemos, no es numerable; para cada $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sea x_E la función característica de E, es decir, $x_E(n) = 1$ cuando $n \in E$ y $x_E(n) = 0$ cuando $n \notin E$. Es claro que si $E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $E \neq F$, entonces $\|x_E - x_F\|_\infty = 1$, con lo que tomando $A = \{x_E : E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ obtenemos un subconjunto no numerable de l_∞ tal que cualesquiera dos elementos distintos de A están a distancia 1. Intuitivamente l_∞ es mucho más grande que c_0 o que c, no posee ningún subespacio denso de dimensión numerable.

Tal vez merezca la pena observar las relaciones de inclusión entre todos los espacios de sucesiones que han aparecido. Para $1 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales (prescindiendo de normas) tenemos:

$$c_{00} \subset l_1 \subset l_p \subset l_q \subset c_0 \subset c \subset l_\infty,$$

inclusiones todas estrictas. La sucesión $\left\{ \dfrac{1}{\log(n+1)} \right\}$ está en c_0 pero no en l_p para $p < \infty$.

2.4. Espacios de funciones continuas

Es fácil generalizar la definición del espacio l_∞ considerando, en vez de sucesiones acotadas, funciones acotadas en un conjunto arbitrario. Más concretamente, si Λ es un conjunto no vacío, consideramos el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^\Lambda$, formado por todas las funciones de Λ en $\mathbb{K}$, con operaciones definidas puntualmente:

$$[x+y](\lambda) = x(\lambda) + y(\lambda)\,; \;\; [\alpha x](\lambda) = \alpha x(\lambda) \qquad (\lambda \in \Lambda,\ x, y \in \mathbb{K}^\Lambda,\ \alpha \in \mathbb{K})$$

Denotaremos por l_∞^Λ al conjunto de todas las funciones acotadas de Λ en $\mathbb{K}$, que evidentemente es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^\Lambda$:

$$l_\infty^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \right\}$$

Es fácil ver que definiendo

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| \,:\, \lambda \in \Lambda\} \qquad \left(x \in \ell_\infty^\Lambda\right)$$

se obtiene una norma en l_∞^Λ y que la convergencia en esta norma equivale a la convergencia uniforme en Λ. Se puede comprobar entonces sin dificultad que l_∞^Λ es un espacio de Banach. Como casos particulares ya conocidos tenemos obviamente l_∞ (cuando $\Lambda = \mathbb{N}$) y l_∞^N (cuando Λ es finito con N elementos). Nos interesan ahora determinados subespacios de l_∞^Λ que aparecen de forma natural cuando Λ está provisto de una topología que asegure la abundancia de funciones continuas de Λ en $\mathbb{K}$.

Si L es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, denotamos por $C_{00}(L)$ al subespacio de ℓ_∞^L formado por las **funciones continuas de soporte compacto,** esto es funciones continuas $f : L \to \mathbb{K}$ tales que el conjunto

$$\operatorname{sop}(f) = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}},$$

llamado **soporte** de la función f, es compacto. Es claro que una tal función está acotada y, de hecho su valor absoluto (o módulo) alcanza un valor máximo en algún punto de L:

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(t)| : t \in L\} \qquad (f \in C_{00}(L)).$$

En general, $C_{00}(L)$ puede no ser un subespacio cerrado de l_∞^L (es lo que ocurre, por ejemplo, cuando $L = \mathbb{R}$) pero en cualquier caso podemos describir el cierre de $C_{00}(L)$. Denotamos por $C_0(L)$ al subespacio de l_∞^L formado por las funciones continuas que **se anulan en el infinito**. Decimos que una función $f : L \longrightarrow \mathbb{K}$ se anula en el infinito cuando, para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{t \in L \ : \ |f(t)| \geqslant \varepsilon\}$ es compacto. Si recordamos la compactación por un punto $\hat{L} = L \cup \{\infty\}$, nuestra terminología resulta coherente, ya que una función continua $f : L \to \mathbb{K}$ se anula en el infinito cuando $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, equivalentemente, cuando f puede extenderse a una función continua en $\hat{L}$ definiendo $f(\infty) = 0$.

Pues bien, no es difícil comprobar que el cierre de $C_{00}(L)$ en l_∞^L es precisamente $C_0(L)$. Por una parte, es evidente que si una función continua $f : L \to \mathbb{K}$ tiene soporte compacto, entonces f se anula en el infinito, ya que para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{t \in L : |f(t)| \geqslant \varepsilon\}$ es cerrado y está contenido en el soporte de f. Por otra parte, se comprueba sin dificultad que $C_0(L)$ es un subespacio cerrado de l_∞^L, luego es un espacio de Banach. Tenemos así asegurada la inclusión $\overline{C_{00}(L)} \subseteq C_0(L)$. La otra inclusión es un buen ejercicio de aplicación del Lema de Urysohn.

En particular, tomando $L = \mathbb{N}$ con la topología discreta, cuyos únicos subconjuntos compactos son los finitos, reaparecen el espacio c_{00} de las sucesiones de soporte finito y el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero.

El caso más interesante se presenta cuando tenemos de hecho un espacio topológico compacto de Hausdorff K. Es claro que entonces $C_{00}(K) = C_0(K)$ es el espacio de Banach de todas las funciones continuas en K con valores escalares, al que denotamos simplemente por $C(K)$, dotado por supuesto con la norma del máximo. Si de nuevo tomamos en $\mathbb{N}$ la topología discreta y K es la compactación por un punto de $\mathbb{N}$, entonces $C(K)$ no es otra cosa que el espacio c de las sucesiones convergentes.

Es claro que aquí tenemos una amplísima gama de espacios de Banach, entre los que cabe destacar por ejemplo el espacio C[0,1] de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ con valores reales o complejos. Es sabido (Teorema de Weierstrass) que toda función continua de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ es límite uniforme de una sucesión de funciones polinómicas, luego $C[0,1]$ tiene un subespacio denso de dimensión numerable, es decir, es un espacio de Banach separable.

En Análisis de Fourier tiene interés el espacio $C(\mathbb{T})$ de todas las funciones continuas en la circunferencia unidad, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, con valores complejos. En lugar de funciones definidas en $\mathbb{T}$, vemos los elementos de este espacio como funciones periódicas en $\mathbb{R}$. Más concretamente, cada $f \in C(\mathbb{T})$ se identifica con la función $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por $\hat{f}(t) = f(e^{it})$ para $t \in \mathbb{R}$, que es una función continua en $\mathbb{R}$ con periodo 2π. Así pues, podemos considerar $C(\mathbb{T})$ como el espacio de todas las funciones continuas y 2π-periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, que es un espacio de Banach con la norma

$$\|g\|_\infty = \text{máx}\{|g(t)| : t \in \mathbb{R}\} \qquad (g \in C(\mathbb{T})).$$

2.5. Espacios de funciones integrables

Sea Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ con medida (de Lebesgue) positiva. Para $N = 1$ los casos más frecuentes son $\Omega = [0,1]$ (o cualquier intervalo compacto), $\Omega = \mathbb{R}^+$ y $\Omega = \mathbb{R}$; para $N > 1$, es frecuente tomar como Ω cualquier subconjunto compacto (con medida positiva) o cualquier subconjunto abierto (no vacío) de $\mathbb{R}^N$. Trabajaremos con funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ identificando dos funciones que coincidan casi por doquier (c.p.d.), esto es, que coincidan salvo en un conjunto de medida nula. Denotaremos por $L(\Omega)$ al espacio vectorial formado por tales *funciones*. Rigurosamente hablando, los elementos de este espacio son clases de equivalencia, pero es mucho menos engorroso y más intuitivo pensar que los elementos de $L(\Omega)$ son funciones, con las debidas precauciones.

2.5.1. Desigualdades integrales de Hölder y Minkowski

A partir de la desigualdad de Young, obtenemos fácilmente que si $f,g \in L(\Omega)$, $1 < p < \infty$ y, como siempre, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$, entonces:

$$\int_\Omega |f(t)g(t)|dt \ \leqslant \left(\int_\Omega |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(t)|^{p^*}\,dt\right)^{1/p^*}$$

A partir de esta *desigualdad integral de Hölder*, obtenemos sin dificultad la correspondiente *desigualdad integral de Minkowski:*

$$\left(\int_\Omega |f(t)+g(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \ \leqslant \ \left(\int_\Omega |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \ + \ \left(\int_\Omega |g(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$$

válida también para cualesquiera $f,g \in L(\Omega)$ y $1 < p < \infty$.

2.5.2. Los espacios $L_p(\Omega)$

Todo está ya preparado para una nueva e importante gama de espacios de Banach. Fijado, una vez más, $1 \leqslant p < \infty$, definimos:

$$L_p(\Omega) = \left\{ f \in L(\Omega) \ : \ \int_\Omega |f(t)|^p\,dt < \infty \right\}.$$

La desigualdad de Minkowski nos asegura claramente que $L_p(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L(\Omega)$ y que, definiendo

$$\|f\|_p \ = \ \left(\int_\Omega |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \qquad (f \in L_p(\Omega)),$$

se obtiene una norma en $L_p(\Omega)$. Conviene resaltar que la identificación de funciones que coinciden c.p.d. es esencial para poder deducir de $\|f\|_p = 0$ que $f = 0$. La complitud de $L_p(\Omega)$ es un importante teorema en teoría de la integración. Al menos en el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, este teorema debe ser conocido y la demostración es casi literalmente la misma en cualquier otro caso:

Teorema de Riesz-Fisher. *Para cualquier conjunto medible $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ de medida positiva y $1 \leqslant p < \infty$, $L_p(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Conviene resaltar dos cuestiones importantes relacionadas con la demostración del teorema anterior. En primer lugar, dicha demostración aprovecha la caracterización de la complitud en términos de series comentada en el tema anterior, se prueba que en $L_p(\Omega)$ toda serie absolutamente convergente es convergente. De hecho, para probar en general dicha caracterización lo que se hace simplemente es observar que la idea usada por Riesz en el caso de $L_p(\Omega)$ puede usarse en cualquier espacio normado. La otra cuestión a resaltar es la relación entre la convergencia en $L_p(\Omega)$ y la convergencia casi por doquier, que se pone de manifiesto en la prueba del teorema anterior: si una sucesión $\{f_n\}$ en $L_p(\Omega)$ converge a $f \in L_p(\Omega)$, entonces existe una sucesión parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ que converge a f casi por doquier en Ω.

Comparemos de nuevo los espacios $L_p(\Omega)$ para distintos valores de p. La situación es muy distinta (en algún caso la opuesta) de la que teníamos para los espacios de sucesiones. Concretamente, dados $1 \leqslant p < q < \infty$, no es demasiado difícil comprobar las siguientes afirmaciones:

- Si Ω tiene medida finita (por ejemplo, si Ω está acotado), entonces $L_q(\Omega)$ está estrictamente contenido en $L_p(\Omega)$.
- Si Ω tiene medida infinita (por ejemplo $\Omega = \mathbb{R}^N$), los conjuntos $L_p(\Omega)$ y $L_q(\Omega)$ no son comparables, es posible encontrar funciones de cualquiera de ellos que no están en el otro.

Concretando al caso en que Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$, conviene observar que el espacio vectorial $C_{00}(\Omega)$, de las funciones continuas de soporte compacto, está contenido de forma natural en $L_p(\Omega)$. En efecto: por una parte, es claro que si $f \in C_{00}(\Omega)$, entonces $\int_\Omega |f(t)|^p \, dt < \infty$; por otra, hay que pensar que un conjunto de medida nula tiene forzosamente interior vacío y, por tanto, dos funciones continuas en Ω que coincidan casi por doquier, han de ser idénticas. Pues bien, otro importante teorema en teoría de la integración asegura que $C_{00}(\Omega)$ es denso en $L_p(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$. De hecho, con cierto esfuerzo adicional, se puede demostrar que toda función de $L_p(\Omega)$ se puede obtener como límite en dicho espacio de una sucesión de funciones de clase C^∞ con soporte compacto contenido en Ω. Así pues, siempre para $1 \leqslant p < \infty$ y cualquier abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, la situación de $C_{00}(\Omega)$ en $L_p(\Omega)$ es enteramente análoga a la que tenía c_{00} dentro de l_p. Para destacar otro caso importante, cuando $\Omega = [0,1]$, también es cierto que $C[0,1]$ es un subespacio denso de $L_p[0,1]$ para $1 \leqslant p < \infty$.

2.6. Funciones esencialmente acotadas

Sea como antes Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$ con medida positiva. Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{K}$ está **esencialmente acotada** cuando existe una constante $M \geqslant 0$ tal que $|f(t)| \leqslant M$ para casi todo $t \in \Omega$, abreviadamente: $|f| \leqslant M$ c.p.d. Denotamos por $L_\infty(\Omega)$ al espacio vectorial formado por todas las funciones medibles y esencialmente acotadas de Ω en $\mathbb{K}$, en el que seguimos identificando funciones que coincidan c.p.d. Definimos en dicho espacio:

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\,|f| = \text{mín}\{M \geqslant 0 \,:\, |f| \leqslant M, \text{ c.p.d.}\} \quad (f \in L_\infty(\Omega)).$$

Es fácil comprobar que el conjunto de constantes que aparece en el último miembro de la igualdad anterior (los mayorantes esenciales de $|f|$) tiene efectivamente un mínimo, al que es lógico llamar **supremo esencial** de $|f|$. Seguidamente, también resulta fácil comprobar que mediante este supremo esencial se consigue efectivamente una norma en $L_\infty(\Omega)$. Una sucesión $\{f_n\}$ converge en $L_\infty(\Omega)$ si y sólo si, converge uniformemente c.p.d. en Ω, cosa que requiere una explicación: lo que se quiere decir es que, eligiendo para cada $n \in \mathbb{N}$ cualquier función φ_n que represente a la clase de equivalencia f_n, existe un conjunto de medida nula $E \subset \Omega$ tal que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente en $\Omega \setminus E$. A partir de aquí se puede deducir ya sin dificultad que $L_\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Comparamos ahora $L_\infty(\Omega)$ con $L_p(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$. Es fácil comprobar:

- Si Ω tiene medida finita, entonces $L_\infty(\Omega)$ está contenido estrictamente en $L_p(\Omega)$.
- Si Ω tiene medida infinita, entonces $L_\infty(\Omega)$ y $L_p(\Omega)$ no son comparables.

Así pues, tomando por ejemplo el caso especialmente interesante $\Omega = [0,1]$, para $1 < p < q < \infty$, tenemos las siguientes inclusiones, todas ellas estrictas:

$$C[0,1] \subset L_\infty[0,1] \subset L_q[0,1] \subset L_p[0,1] \subset L_1[0,1].$$

Nótese que $C[0,1]$ sí se identifica totalmente con un subespacio cerrado de $L_\infty[0,1]$.

Tema 3

Operadores y funcionales lineales continuos

En este tema trabajamos con aplicaciones lineales entre espacios vectoriales. Puesto que los vectores de los espacios que nos interesan (espacios normados) suelen ser funciones, las aplicaciones lineales entre tales espacios transformarán unas funciones en otras, y es usual llamar "operadores" a las transformaciones de este tipo. Así pues, un **operador lineal** es, simplemente, una aplicación lineal de un espacio vectorial en otro, lógicamente ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Prestaremos especial atención al caso particular en que el espacio de llegada es simplemente el cuerpo escalar. Entonces el término "operador" no resulta adecuado, ya que típicamente estaremos transformando funciones en números y para este tipo de transformación se prefiere el término "funcional". Por tanto, un **funcional lineal** en un espacio vectorial no es más que una aplicación lineal de dicho espacio en el cuerpo $\mathbb{K}$ sobre el que está construido.

3.1. Operadores lineales continuos

La continuidad de un operador lineal entre espacios normados puede caracterizarse de varias maneras, entre las que destacamos la más útil, para luego comentar las restantes.

Proposición. *Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si, y sólo si, existe una constante $M \geqslant 0$ tal que:*

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in X. \qquad \diamondsuit$$

Obsérvese que escribimos simplemente Tx en lugar de $T(x)$ y que denotamos con el mismo símbolo las normas de X e Y, lo que no debe causar confusión.

La demostración de la proposición anterior es muy sencilla. En efecto, si T es continuo en cero, la imagen inversa por T de la bola unidad de Y (un entorno de cero en Y) es un entorno de cero en X, que deberá contener una bola cerrada de centro cero y radio, digamos, $\delta > 0$; deducimos inmediatamente que se verifica $\diamondsuit$ con $M = 1/\delta$. Nótese que sólo hemos usado la continuidad en cero y que de la continuidad en otro punto $x_0 \in X$ hubiésemos deducido la continuidad en cero sin más que observar que $Tx = T(x+x_0) - Tx_0$ para cualquier $x \in X$. Así pues, $\diamondsuit$ se cumple tan pronto como T sea continuo en algún punto de X.

Recíprocamente, si se verifica $\diamondsuit$, llamando d a las distancias de X e Y, tenemos:

$$d(Tu,Tv) = \|Tu - Tv\| = \|T(u-v)\| \leqslant M\,\|u-v\| = M\,d(u,v) \qquad (u,v \in X),$$

lo que nos dice que T verifica una condición de Lipschitz con constante M, en particular T es uniformemente continuo, luego continuo. Resaltamos que *para un operador lineal entre espacios normados, la continuidad en algún punto equivale a la continuidad en todo punto, a la continuidad uniforme en todo el espacio de partida e incluso a que el operador verifique una condición de Lipschitz.* Ejemplos sencillos (con funciones reales de variable real) muestran que, sin linealidad, cada una de las anteriores afirmaciones es estrictamente más débil que la que le sigue.

En otro orden de ideas, observamos que la condición $\diamondsuit$ equivale a que T esté acotado en la bola unidad (abierta o cerrada) de X, o en la esfera unidad de X, o en todo subconjunto acotado de X. Por esta razón a los operadores lineales continuos entre espacios normados se les suele llamar también **operadores lineales acotados**, pues transforman subconjuntos acotados del espacio de partida en subconjuntos acotados del espacio de llegada: conservan la acotación.

3.2. Norma de Operadores

Dados dos espacios normados X e Y, denotaremos por $L(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales continuos de X en Y, que es claramente un espacio vectorial con operaciones fáciles de adivinar:

$$[T+S]x = Tx + Sx \ ; \ [\lambda T]x = \lambda Tx \qquad (T,S \in L(X,Y), \lambda \in \mathbb{K}, x \in X).$$

La condición $\diamondsuit$ sugiere la posibilidad de definir la norma de un operador $T \in L(X,Y)$ como su constante de Lipschitz, es decir, la mínima constante $M \geqslant 0$ que puede aparecer en $\diamondsuit$, y eso es exactamente lo que vamos a hacer. Es claro que esta mínima constante existe; podemos calcularla de diversas formas, todas ellas útiles:

$$\begin{aligned}\|T\| &:= \text{mín}\left\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\| \ \forall x \in X\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\}\\ &= \sup\left\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\right\}\\ &= \sup\left\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\right\}\\ &= \sup\left\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| < 1\right\} \qquad (T \in L(X,Y)).\end{aligned}$$

Es fácil comprobar todas las igualdades anteriores, así como que $T \mapsto \|T\|$ es efectivamente una norma en $L(X,Y)$, que recibe el nombre genérico de **norma de operadores** y al espacio normado $L(X,Y)$ se le llama **espacio de operadores**.

Es claro que *una sucesión de operadores converge en $L(X,Y)$ si, y sólo si, converge uniformemente en la bola unidad de X, equivalentemente, converge uniformemente en cada subconjunto acotado de X*. A partir de aquí, es fácil deducir que *si Y es un espacio de Banach, entonces también $L(X,Y)$ es un espacio de Banach.* En efecto, si $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L(X,Y)$, la desigualdad $\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\| \, \|x\|$ implica claramente que, para cada $x \in X$, $\{T_n x\}$ es una sucesión de Cauchy en Y, luego convergente; definiendo $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ para todo $x \in X$, se comprueba sin dificultad que $T \in L(X,Y)$ y que $\{\|T_n - T\|\} \to 0$. Más adelante veremos que la afirmación recíproca también es cierta, la complitud de $L(X,Y)$ implica la de Y. Conviene comentar la razón por la que no podemos probar ya esta implicación: sin ninguna información adicional sobre los espacios X e Y, no podemos probar en este momento que exista un operador lineal continuo (no nulo) de uno en otro, así que poco provecho podemos sacar de la complitud de $L(X,Y)$ si ni siquiera podemos asegurar que $L(X,Y) \neq \{0\}$.

La implicación demostrada tiene una aplicación inmediata: cualquier operador $T \in L(X,Y)$ puede verse como un operador lineal y continuo de X en la completación $\hat{Y}$ del espacio normado Y, es decir como un elemento del espacio de Banach $L(X,\hat{Y})$.

La continuidad uniforme de los operadores lineales continuos tiene una importante consecuencia, ya que sabemos que una función uniformemente continua entre dos espacios métricos, cuando el espacio de llegada es completo, puede extenderse (de manera única) de un conjunto a su cierre, o lo viene a ser lo mismo, de un subconjunto denso al total, conservando la continuidad uniforme. En nuestro caso, podemos partir de un operador lineal continuo en un subespacio denso y comprobar sin dificultad que la extensión conserva también la linealidad. Así pues, *si M es un subespacio denso de un espacio normado X, Y es un espacio de Banach y $T \in L(M,Y)$, existe un único operador $\tilde{T} \in L(X,Y)$ cuya restricción a X coincide con T*. Además es fácil comprobar que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, con lo cual, la aplicación $T \mapsto \tilde{T}$ *identifica totalmente* $L(M,Y)$ con $L(X,Y)$, es una biyección lineal entre ellos que conserva la norma. De las dos observaciones anteriores concluimos que, al estudiar un espacio de operadores $L(X,Y)$, no se pierde mucha generalidad suponiendo que X e Y son espacios de Banach, pues siempre podemos sustituirlos por sus respectivas completaciones.

3.3. Funcionales lineales continuos

Por supuesto, todo lo dicho en los apartados anteriores sobre la continuidad de operadores lineales sigue siendo cierto cuando el espacio de llegada es el cuerpo base, es decir, cuando discutimos la continuidad de funcionales lineales en un espacio normado.

Así pues, para un funcional lineal f en un espacio normado X, es equivalente ser continuo en algún punto, ser continuo en todo punto, ser uniformemente continuo y verificar la desigualdad:

$$|f(x)| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X$$

para alguna constante $M \geqslant 0$. De nuevo esta condición equivale a que f esté acotado en la bola unidad (abierta o cerrada) de X, en la esfera unidad de X, o a que f transforme subconjuntos acotados de X en subconjuntos acotados de $\mathbb{K}$.

El espacio de todos los funcionales lineales continuos en X se denota por X^* (en vez de $L(X,\mathbb{K})$) y en él disponemos de una norma que se puede expresar de varias formas, entre las que destacamos dos:

$$\begin{aligned}\|f\| &= \min\left\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\right\} \\ &= \sup\left\{|f(x)| : x \in X,\, \|x\| \leqslant 1\right\} \qquad (f \in X^*).\end{aligned}$$

La complitud de $\mathbb{K}$ nos asegura que X^* siempre es completo. El espacio de Banach X^* recibe el nombre de *dual topológico* del espacio normado X, para diferenciarlo del *dual algebraico*, que estaría formado por todos los funcionales lineales en X. Generalmente no hay lugar a confusión y decimos simplemente que X^* es el **espacio dual** del espacio normado X y también decimos que la norma de X^* es la **norma dual** de la norma de X.

Hasta qué punto se puede decir que existe una auténtica *dualidad* entre un espacio normado X y su dual X^*, es algo que discutiremos a fondo más adelante. De momento tenemos cierta asimetría, puesto que X^* es completo aunque X no lo sea. Como nos ocurría con los operadores, para un espacio normado $X \neq \{0\}$, sin información adicional no podemos asegurar que exista un funcional lineal continuo no nulo en X, es decir, que $X^* \neq \{0\}$. Sin embargo, para la mayoría de los espacios normados presentados en el tema anterior podremos dar ya una descripción concreta y enteramente satisfactoria del espacio dual.

Comentemos también que si M es un subespacio denso en un espacio normado X, cada $f \in M^*$ es la restricción a M de un único $\tilde{f} \in X^*$ y la aplicación $f \mapsto \tilde{f}$ identifica totalmente M^* con X^*, es una biyección lineal que conserva la norma. En particular, el dual de un espacio normado X se identifica totalmente con el dual de un espacio de Banach, la completación de X.

En otro orden de ideas, notemos que un funcional lineal f en un espacio vectorial X, está determinado por su núcleo $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$, salvo un factor de proporcionalidad: si f, g son funcionales lineales en un mismo espacio vectorial X y $\ker f = \ker g$, entonces $f = \lambda g$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$. No es de extrañar, por tanto, que la continuidad de un funcional lineal en un espacio normado pueda caracterizarse en términos de su núcleo:

Proposición. *Un funcional lineal en un espacio normado es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado.*

En el próximo tema veremos una versión más general de esta proposición, que será consecuencia evidente de resultados más importantes. De momento, demostrar directamente esta proposición puede ser un buen ejercicio.

3.4. Duales de algunos espacios de Banach

Vamos a describir con detalle los espacios duales de muchos espacios de Banach presentados en el tema anterior. Veremos, por ejemplo, que el dual de un espacio de sucesiones se identifica frecuentemente con otro espacio de sucesiones. Debe quedar claro desde el principio lo que entendemos por "identificar". Como ya hemos comentado un par de veces, dos espacios normados X e Y deben considerarse idénticos cuando existe una biyección lineal S de X sobre Y que conserva la norma, es decir, $\|Sx\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. En vista de la linealidad, esto es lo mismo que decir que S es isométrica $\|Su - Sv\| = \|u - v\|$ para cualesquiera $u, v \in X$, por lo que decimos que S es un **isomorfismo isométrico** de X sobre Y. Cuando existe un isomorfismo isométrico entre dos espacios normados X e Y, decimos lógicamente que X e Y son **isométricamente isomorfos** y escribimos $X \equiv Y$.

3.4.1. Duales de espacios de dimensión finita

Recordemos un hecho sobradamente conocido, pero introduciendo una notación que nos será útil en todo lo que sigue. Un funcional lineal en $\mathbb{K}^N$ queda caracterizado por sus valores en una base cualquiera de $\mathbb{K}^N$. Usaremos la base natural $\{e_k : 1 \leqslant k \leqslant N\}$, donde, como siempre, $e_k(k) = 1$ y $e_k(j) = 0$ para $j \neq k$. Concretamente, si $f : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ es lineal, tenemos:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, f(e_k) \quad (x \in \mathbb{K}^N)$$

De esta expresión se deduce también claramente que f es continuo cuando consideramos en $\mathbb{K}^N$ la topología producto. Definiendo $[Tf](k) = f(e_k)$ para $1 \leqslant k \leqslant N$, asociamos a cada funcional lineal f en $\mathbb{K}^N$ un vector $Tf \in \mathbb{K}^N$. Recíprocamente, a cada vector $y \in \mathbb{K}^N$ asociamos un funcional lineal Sy en $\mathbb{K}^N$ sin más que definir

$$[Sy](x) \;=\; \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k) \quad (x \in \mathbb{K}^N),$$

y es evidente que $T(Sy) = y$ para todo $y \in \mathbb{K}^N$, así como que $S(Tf) = f$ para cualquier funcional lineal f en $\mathbb{K}^N$. En resumen, S es una biyección lineal (con inversa T) de $\mathbb{K}^N$ sobre el espacio vectorial de todos los funcionales lineales en $\mathbb{K}^N$, que son automáticamente continuos cuando consideramos la topología producto en $\mathbb{K}^N$.

Fijado $1 \leqslant p \leqslant \infty$, puesto que la norma $\|\cdot\|_p$ genera la topología producto en $\mathbb{K}^N$, deducimos que $(l_p^N)^*$ va a ser $\mathbb{K}^N$ con una norma, la norma dual de $\|\cdot\|_p$, que ahora vamos a calcular. Dicho de otra forma, queremos saber qué norma en $\mathbb{K}^N$ hace que el operador S (equivalentemente su inverso T) sea un isomorfismo isométrico.

Para $1 < p < \infty$, la desigualdad de Hölder nos da, fijado $y \in \mathbb{K}^N$, una estimación de la norma de Sy como funcional lineal continuo en l_p^N ya que:

$$|[Sy](x)| = \Big|\sum_{k=1}^{N} x(k)y(k)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \|y\|_{p^*}\ \|x\|_p \quad (x \in l_p^N),$$

de donde $\|Sy\| \leqslant \|y\|_{p^*}$. Conseguir la igualdad en esta última desigualdad equivale a comprobar que la estimación que hemos hecho es óptima, para lo cual bastará encontrar un $x \in \mathbb{K}^N$ para el que todas las desigualdades anteriores sean igualdades, pero eso no es difícil. Para $k = 1, 2, \ldots, N$ escribimos $y(k) = \lambda_k |y(k)|$ con $\lambda_k \in \mathbb{K}$ y tomamos $x(k) = \overline{\lambda_k} |y(k)|^{p^*-1}$, obteniendo:

$$\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^{p^*} = [Sy](x) \leqslant \|Sy\|\,\|x\|_p = \|Sy\| \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^{p^*}\right)^{1/p},$$

de donde claramente $\|y\|_{p^*} \leqslant \|Sy\|$ como queríamos. Así pues, la norma dual de $\|\cdot\|_p$ es $\|\cdot\|_{p^*}$.

El mismo resultado se puede probar sin dificultad en los casos extremos, entendiendo que $p^* = \infty$ cuando $p = 1$ y $p^* = 1$ para $p = \infty$. En resumen podemos escribir:

$$(l_p^N)^* \equiv l_{p^*}^N \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

Como la relación entre p y p^* es simétrica, el espacio dual de $l_{p^*}^N$ vuelve a ser l_p^N, hay perfecta simetría entre cada espacio y su dual. La norma euclídea coincide con su dual: $(l_2^N)^* = l_2^N$.

3.4.2. Duales de espacios de sucesiones

Empecemos considerando el espacio l_p, por ahora con $1 < p < \infty$. Para describir su dual seguimos literalmente el mismo razonamiento hecho en dimensión finita, sustituyendo sumas finitas por sumas de series y prestando atención a la convergencia. Concretamente, dados $x \in l_p$ e $y \in l_{p^*}$, la desigualdad de Hölder nos da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)| \leqslant \|y\|_{p^*} \, \|x\|_p,$$

Manteniendo de momento fija la sucesión $y \in l_{p^*}$, deducimos que escribiendo

$$[Sy](x) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \qquad (x \in l_p),$$

Sy está bien definido y es un funcional lineal continuo en l_p, que verifica $\|Sy\| \leqslant \|y\|_{p^*}$. El mismo razonamiento que en dimensión finita nos da la igualdad. En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$ escribimos $y(k) = \lambda_k |y(k)|$ donde $\lambda_k \in \mathbb{K}$ verifica $|\lambda_k| = 1$ y definimos $x(k) = \overline{\lambda_k} |y(k)|^{p^*-1}$. Por una parte tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^{(p^*-1)p} = \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^{p^*} < \infty$$

luego $x \in l_p$ y, por otra parte,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^{p^*} = [Sy](x) \leqslant \|Sy\| \, \|x\|_p = \|Sy\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^{p^*} \right)^{1/p}$$

de donde claramente $\|y\|_{p^*} \leqslant \|Sy\|$, como queríamos.

Podemos ya hacer variar la sucesión $y \in l_{p^*}$, para obtener un operador lineal e isométrico $S : l_{p^*} \to l_p^*$. Para identificar ambos espacios falta comprobar que S es sobreyectivo. Dado un funcional $f \in l_p^*$, buscamos $y \in l_{p^*}$ tal que $Sy = f$ y está claro que sólo hay una posibilidad: debemos tomar $y(n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde e_n denota como siempre el n-ésimo vector unidad.

Vemos en primer lugar que $y \in l_{p^*}$, para lo cual refinamos una idea que ya hemos usado. Para cada $k \in \mathbb{N}$, escribimos otra vez $y(k) = \lambda_k |y(k)|$ con $\lambda_k \in \mathbb{K}$ y $|\lambda_k| = 1$. Tomar la sucesión x como se hizo antes no es una buena idea, porque para asegurar que $x \in l_p$ necesitaríamos saber que $y \in l_{p^*}$ que es precisamente lo que queremos probar. La solución es "truncar" el razonamiento. Fijado un $N \in \mathbb{N}$ consideramos la sucesión x_N de soporte finito dada por

$$x_N = \sum_{k=1}^{N} \overline{\lambda_k} |y(k)|^{p^*-1} e_k$$

es decir, $x_N(k) = \overline{\lambda_k} |y(k)|^{p^*-1}$ para $k \leqslant N$ y $x_N(k) = 0$ para $k > N$. Tenemos entonces

$$\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^{p^*} = \sum_{k=1}^{N} x_N(k) f(e_k) = f(x_N) \leqslant \|f\| \|x_N\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{N} \|y(k)\|^{p^*} \right)^{1/p}$$

de donde claramente deducimos que $\sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^{p^*} \leqslant \|f\|^{p^*}$, luego $y \in l_{p^*}$ como queríamos.

Sólo queda comprobar que $Sy = f$, pero esto es inmediato. Por la definición de y tenemos que $[Sy](e_n) = y(n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por linealidad, Sy ha de coincidir con f en el subespacio engendrado por los vectores unidad, pero sabemos que dicho subespacio es denso en l_p luego, por continuidad, ambos funcionales han de coincidir en todo el espacio l_p.

Obsérvese que los vectores unidad en l_p muestran de nuevo un comportamiento que recuerda al de una base, siempre que tengamos continuidad: un funcional lineal *continuo* queda determinado por sus valores sobre los vectores de la base de Schauder $\{e_n\}$. En realidad este hecho se comprueba de manera muy directa: puesto que cada $x \in l_p$ se expresa en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x(k)e_k$$

deducimos que todo $f \in l_p^*$ debe verificar

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{n} x(k)e_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x(k)f(e_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)f(e_n)$$

para todo $x \in l_p$, y esto pone claramente de manifiesto que f queda determinado por la sucesión $\{f(e_n)\}$. Obsérvese que el razonamiento anterior podría hacerse igualmente para cualquier operador lineal continuo en cualquier espacio de Banach con base de Schauder.

Queda pues probado que el operador S con el que hemos venido trabajando es un isomorfismo isométrico y podemos escribir:

$$l_p^* \equiv l_{p^*} \quad (1 < p < \infty).$$

Obsérvese que seguimos teniendo simetría, el dual de l_p^* vuelve a ser l_p. El caso $p = 2$ sigue siendo interesante: $l_2^* \equiv l_2$.

Al caso $p = 1$ se le puede dar un tratamiento similar, ahora con $p^* = \infty$: el operador S se define formalmente de la misma manera y, razonamientos análogos a los anteriores, incluso más sencillos en algún aspecto, nos llevan a comprobar que S es un isomorfismo isométrico, obteniendo por tanto que

$$l_1^* \equiv l_\infty$$

El caso $p = \infty$ nos reserva una sorpresa importante. En principio, puesto que en este caso tomamos $p^* = 1$, nada nos impide definir un operador lineal $S : l_1 \longrightarrow l_\infty^*$ de la misma forma que en los casos anteriores. Comprobamos sin dificultad que S es isométrico, lo que nos permite identificar l_1 con un subespacio cerrado de l_∞^*. La sorpresa estriba en que esta vez S no es sobreyectivo. De momento no podemos probar este hecho, pero podemos explicar lo que ocurre. Si intentamos reproducir los razonamientos de los casos anteriores, el problema con el que nos encontramos es que un funcional $f \in l_\infty^*$ no queda determinado por sus valores sobre los vectores unidad, porque el subespacio engendrado por dichos vectores no es denso en l_∞. Veremos más adelante que existen funcionales lineales continuos en l_∞ que se anulan en los vectores unidad pero no son idénticamente nulos.

Sin embargo, no todo está perdido, porque los vectores unidad sí forman una base de Schauder de c_0, luego un funcional $f \in c_0^*$ sí queda determinado por sus valores sobre ellos, así que podemos trabajar con el espacio de Banach c_0 en lugar de l_∞. Con métodos análogos a los usados en ejemplos anteriores se prueba entonces que

$$c_0^* \equiv l_1$$

Obsérvese que ha desaparecido totalmente la simetría entre un espacio y su dual: el dual de c_0 es l_1 pero el dual de l_1 es l_∞.

3.4.3. Duales de espacios de funciones integrables

Dado un conjunto medible $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ con medida de Lebesgue positiva, pasamos a exponer la descripción de los duales de los espacios $L_p(\Omega)$ con $1 \leqslant p < \infty$ aunque, como se verá, no lleguemos a ofrecer demostraciones completas.

Para $1 < p < \infty$, en clara analogía con lo que hicimos para espacios de sucesiones, la desigualdad integral de Hölder nos dice que escribiendo

$$[Sg](f) = \int_\Omega f(t)g(t)\,dt \qquad (f \in L_p(\Omega), g \in L_{p^*}(\Omega)),$$

obtenemos, primero con g fija, un funcional $Sg \in L_p(\Omega)^*$ que verifica $\|Sg\| \leqslant \|g\|_{p^*}$ y, al variar g, un operador lineal continuo $S : L_{p^*}(\Omega) \to L_p(\Omega)^*$ con $\|S\| \leqslant 1$.

Demostrar que S es isométrico requiere una observación elemental: toda función medible $g : \Omega \to \mathbb{K}$ puede escribirse en la forma $g = \alpha|g|$ donde α es también una función medible de Ω en $\mathbb{K}$ con módulo constantemente igual a 1. Fijada entonces $g \in L_{p^*}(\Omega)$ tomamos, como cabía esperar, $f = \overline{\alpha}|g|^{p^*-1}$; comprobamos fácilmente que $f \in L_p(\Omega)$ y tenemos

$$\int_\Omega |g(t)|^{p^*}\,dt = [Sg](f) \leqslant \|Sg\|\,\|f\|_p = \|Sg\| \left(\int_\Omega |g(t)|^{p^*}\,dt\right)^{1/p},$$

de donde claramente $\|g\|_{p^*} \leqslant \|Sg\|$.

En el caso $p = 1$ tomamos como siempre $p^* = \infty$ y conseguimos también un operador lineal isométrico $S : L_\infty(\Omega) \to L_1(\Omega)^*$, definido formalmente igual que en el caso $p > 1$.

Así pues, para $1 \leqslant p < \infty$, tenemos un operador lineal isométrico $S : L_{p^*}(\Omega) \to L_p(\Omega)^*$. Pues bien, en todos los casos S es sobreyectivo, con lo que tenemos finalmente:

$$L_p(\Omega)^* \equiv L_{p^*}(\Omega) \quad (1 \leqslant p < \infty).$$

Este resultado se conoce como *Teorema de Representación de Riesz*. La parte de la demostración que aquí no hemos presentado, la sobreyectividad del operador S, se deduce de un teorema fundamental en Teoría de la Medida: el *Teorema de Radon-Nikodỳm.*

La descripción del dual del espacio $L_\infty(\Omega)$ vuelve a ser una cuestión más difícil, que no vamos a abordar.

3.4.4. Duales de espacios de funciones continuas

En general, para un espacio compacto y de Hausdorff K, la descripción del dual del espacio de Banach $C(K)$ requiere conocimientos de Teoría de la Medida. Uno de los resultados fundamentales de dicha teoría, conocido también como *Teorema de Representación de Riesz*, identifica $C(K)^*$ con un espacio de medidas reales o complejas en K, dotado de la norma conveniente, la *variación total* de una medida. En el caso más general de un espacio localmente compacto y de Hausdorff L, la descripción del dual del espacio $C_0(L)$ de las funciones continuas en L que se anulan en el infinito no tiene mayor dificultad. El Teorema de Riesz cubre también este caso y describe $C_0(L)^*$ como un espacio de medidas en L. Aquí solamente vamos a presentar algunos ejemplos de funcionales lineales continuos en espacios de funciones continuas.

Dado un espacio topológico compacto y de Hausdorff K, puesto que la convergencia uniforme en K implica la puntual, observamos que el valor de una función en cualquier punto de K depende de manera lineal y continua de dicha función. Más concretamente, fijado un punto $t \in K$, podemos definir un funcional $\delta_t : C(K) \to \mathbb{K}$ de la siguiente forma:

$$\delta_t(f) = f(t) \quad (f \in C(K)).$$

Es evidente que $\delta_t \in C(K)^*$ con $\|\delta_t\| = 1$. La notación δ_t se usa en honor del físico y matemático británico P. Dirac y suele decirse que δ_t es el funcional de Dirac en el punto t. Podemos construir nuevos funcionales lineales continuos en $C(K)$ haciendo combinaciones lineales de funcionales de Dirac y pasando al límite. Obtenemos así el conjunto $\Delta = \overline{\operatorname{Lin}\{\delta_t : t \in K\}} \subseteq C(K)^*$, que es el subespacio cerrado de $C(K)^*$ engendrado por los funcionales de Dirac. En general este subespacio está lejos de ser el total. De hecho, se sabe que $\Delta = C(K)^*$ si, y sólo si, todo subconjunto no vacío de K tiene un punto aislado. Un espacio topológico conexo, pongamos por caso $[0,1]$, está lejos de cumplir tal cosa.

El ejemplo por antonomasia de funcional lineal continuo en $C[0,1]$ es la integral:

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt \quad (f \in C[0,1]).$$

Es inmediato comprobar que $\varphi \in C[0,1]^*$ con $\|\varphi\| = 1$.

De hecho, podemos hacer algo más general: dada una función integrable $g \in L_1[0,1]$, es claro que podemos definir un funcional φ_g en $C[0,1]$ escribiendo

$$\varphi_g(f) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \quad (f \in C[0,1]).$$

Otra vez es inmediato comprobar que $\varphi_g \in C[0,1]^*$ con $\|\varphi_g\| \leqslant \|g\|_1$. Con algún esfuerzo adicional se consigue demostrar también que la última desigualdad es de hecho una igualdad, con lo que $L_1[0,1]$ resulta ser isométricamente isomorfo a un subespacio de $C[0,1]^*$.

Tema 4

Espacios normados de dimensión finita

Vamos a presentar aquí dos resultados fundamentales acerca de los espacios normados más sencillos, los de dimensión finita. Estudiaremos el Teorema de Hausdorff, según el cual todas las normas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes, del que deduciremos consecuencias importantes. Veremos también el Teorema de Riesz, que da una caracterización puramente topológica de los espacios normados de dimensión finita.

4.1. Teorema de Hausdorff

Hasta ahora hemos manejado una sola relación de equivalencia entre espacios normados: identificamos dos espacios normados cuando existe un isomorfismo isométrico entre ellos, pues está claro que en tal caso los dos espacios son totalmente idénticos.

Sin embargo, muchas propiedades importantes de los espacios normados, la complitud por ejemplo, no dependen de la norma concreta del espacio, sino solamente de su topología, son propiedades que se conservan al sustituir la norma por otra equivalente. Para el estudio de tales propiedades, podemos identificar dos espacios normados que sean iguales como espacios vectoriales topológicos, aunque no sean isométricamente isomorfos. La aplicación que permite hacer este tipo de identificación recibe el nombre de isomorfismo topológico:

Si X e Y son espacios normados, un **isomorfismo topológico** de X sobre Y es una biyección lineal $T : X \to Y$ tal que T y T^{-1} son continuas. Naturalmente, cuando tal isomorfismo existe, decimos que X e Y son **topológicamente isomorfos**.

Dos espacios normados isométricamente isomorfos también lo son topológicamente, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, los espacios l_∞^2 y l_2^2 son topológicamente isomorfos, pero se puede probar sin dificultad que no existe un isomorfismo isométrico entre ellos. Basta observar que la esfera unidad de l_∞^2 contiene segmentos no triviales, lo que no ocurre en l_2^2. Resaltemos finalmente que dos normas en un mismo espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si, la identidad es un isomorfismo topológico de X con una norma en X con la otra.

Pues bien, nuestro objetivo es probar que, para cada número natural N, existe, salvo isomorfismos topológicos, un único espacio normado de dimensión N sobre $\mathbb{K}$, a saber, $\mathbb{K}^N$ con cualquier norma. De hecho, probaremos algo formalmente más fuerte. Para ello, iremos comprobando sucesivamente afirmaciones que acabarán confluyendo en un solo enunciado que las incluya a todas. Empezamos con la siguiente observación:

[1] *Para cualquier $N \in \mathbb{N}$, todo operador lineal de $\mathbb{K}^N$ con la topología usual, en cualquier espacio normado, es continua.*

La comprobación de este hecho es muy sencilla. Empezando por el caso $N = 1$, un operador lineal de $\mathbb{K}$ en un espacio normado Y tendrá la forma $\lambda \mapsto \lambda y_1$ para cierto vector $y_1 \in Y$, con lo que la continuidad de T es consecuencia obvia de la continuidad del producto por escalares del espacio Y. En el caso general, si $T : \mathbb{K}^N \to Y$ es un operador lineal, existirán vectores $y_1, y_2, \ldots, y_N \in Y$ (las imágenes por T de la base natural de $\mathbb{K}^N$) tales que T tiene la forma

$$Tx = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y_k \qquad \big(x = (x(1), x(2), \ldots, x(N)) \in \mathbb{K}^N\big)$$

Observamos que $T = T_1 + T_2 + \ldots + T_N$ donde, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, el operador lineal $T_k : \mathbb{K}^N \to Y$ viene dado por $T_k x = x(k)\, y_k$ para todo $x \in \mathbb{K}^N$. Bastará pues comprobar que cada operador T_k es continuo, pero esto es fácil, ya que T_k se obtiene componiendo la proyección $x \mapsto x(k)$ de $\mathbb{K}^N$ en $\mathbb{K}$, que es continua porque en $\mathbb{K}^N$ tenemos la topología producto, y la aplicación $\lambda \mapsto \lambda y_k$ de $\mathbb{K}$ en Y, que es continua como hemos visto en el caso $N = 1$.

El siguiente resultado, clave en lo que sigue, fue obtenido por F. Hausdorff en 1932:

[2] *Fijado $N \in \mathbb{N}$, todas las normas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes.*

Para probar este hecho bastará ver que cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{K}^N$ es equivalente a una dada, pongamos por ejemplo la norma euclídea $\|\cdot\|_2$. Puesto que ésta última genera la topología producto en $\mathbb{K}^N$, el lema anterior nos asegura que la identidad en $\mathbb{K}^N$, vista como una aplicación de $\mathbb{K}^N$ con la norma $\|\cdot\|_2$ en $\mathbb{K}^N$ con la norma $\|\cdot\|$, es un operador lineal continuo. Por tanto, existirá una constante $\beta > 0$ tal que $\|x\| \leqslant \beta \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{K}^N$ y tenemos hecha la mitad del trabajo.

Para la otra mitad, consideramos la esfera unidad euclídea: $S = \{x \in \mathbb{K}^N : \|x\|_2 = 1\}$. El Teorema de Heine-Borel-Lebesgue nos asegura que S es un subconjunto compacto de $\mathbb{K}^N$ con la topología usual, que es la asociada a la norma $\|\cdot\|_2$. Pero entonces, la continuidad de la función identidad antes comentada nos dice que S también es un subconjunto compacto de $\mathbb{K}^N$ con la topología asociada a la norma $\|\cdot\|$, como imagen de un compacto por una función continua. Puesto que cualquier norma es una función continua para la topología que genera, deducimos que la norma $\|\cdot\|$ alcanza su mínimo en el conjunto compacto S. Poniendo $\alpha = \min\{\|x\| : x \in S\}$ es claro que $\alpha > 0$ y que $\alpha \|x\|_2 \leqslant \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{K}^N$. En resumen, existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha \|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \beta \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^N$$

lo que concluye la demostración.

Pasamos ahora a generalizar formalmente el resultado anterior para liberarnos del sistema de coordenadas que inevitablemente tenemos presente en $\mathbb{K}^N$. En un primer paso tenemos:

[3] *Si Y es un espacio normado de dimensión N y consideramos en $\mathbb{K}^N$ la topología usual, toda biyección lineal $T : \mathbb{K}^N \to Y$ es un isomorfismo topológico*

En efecto, definiendo $\|x\| = \|Tx\|$ para todo $x \in \mathbb{K}^N$, es claro que obtenemos una norma en $\mathbb{K}^N$ que, por lo que ya sabemos, será equivalente a la norma euclídea $\|\cdot\|_2$. Por tanto existirán constantes positivas α y β tales que

$$\alpha\|x\|_2 \leqslant \|Tx\| \leqslant \beta\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}^N$$

La segunda desigualdad nos dice directamente que T es continuo. Pero dado $y \in Y$, tomando en la primera desigualdad $x = T^{-1}(y)$ obtenemos $\|T^{-1}(y)\|_2 \leqslant \alpha^{-1}\|y\|$, que nos asegura la continuidad de T^{-1}. Siguiendo en la misma línea de generalización formal, podemos ya probar lo siguiente:

[4] *Si X e Y son espacios normados de dimensión finita, toda biyección lineal $T : X \to Y$ es un isomorfismo topológico*

En efecto, si X tiene dimensión N, existe una biyección lineal Φ de $\mathbb{K}^N$ sobre X, con lo que $\Psi = T \circ \Phi$ es una biyección lineal de $\mathbb{K}^N$ sobre Y. Poniendo en $\mathbb{K}^N$ la topología usual, deducimos de [**3**] que tanto Φ como Ψ son isomorfismos topológicos, luego también lo es $T = \Psi \circ \Phi^{-1}$.

Por supuesto, el último enunciado nos asegura que dos espacios normados de la misma dimensión finita son topológicamente isomorfos, pero nos dice más: no sólo existe un isomorfismo topológico entre los dos espacios, sino que cualquier biyección lineal entre ellos es un isomorfismo topológico. Esto es lo nos permite decir que en un espacio vectorial de dimensión finita hay una topología de la norma que está determinada de manera única, independientemente de cualquier sistema de referencia. Pasamos ya a establecer la versión definitiva del Teorema de Hausdorff:

Teorema. *Todo operador lineal definido en un espacio normado de dimensión finita, con valores en cualquier otro espacio normado, es continuo.*

Demostración. Sea X un espacio normado de dimensión finita N, Y un espacio normado arbitrario y $S : X \to Y$ un operador lineal. Pongamos en $\mathbb{K}^N$ la topología usual y sea $\Phi : \mathbb{K}^N \to X$ cualquier biyección lineal. Aplicando [**1**] sabemos que el operador $T = S \circ \Phi : \mathbb{K}^N \to Y$ es continuo. Por otra parte, de [**3**] deducimos que Φ es un isomorfismo topológico, con lo cual, $S = T \circ \Phi^{-1}$ es continuo, como queríamos demostrar. ■

Obsérvese que el teorema anterior incluye las cuatro afirmaciones que habíamos probado previamente. Para deducir la afirmación [**4**] basta pensar que si T es una biyección lineal entre dos espacios normados de dimensión finita, el teorema anterior nos asegura que T y T^{-1} son continuas. Las afirmaciones [**3**] y [**2**] son casos particulares de [**4**], mientras que la afirmación [**1**] está obviamente incluida en el Teorema anterior.

En Análisis Funcional, los espacios de dimensión finita suelen aparecer como subespacios de espacios de dimensión infinita. En esa situación, los razonamientos anteriores nos darán enseguida información relevante. Resaltemos para ello un hecho ya comentado: los isomorfismos topológicos entre espacios normados conservan la complitud, es decir, un espacio normado que sea topológicamente isomorfo a un espacio de Banach es también completo. Como la norma euclídea en $\mathbb{K}^N$ es completa, deducimos que *todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach*. Por tanto,

Corolario. *Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.*

Baste un sencillo ejemplo para poner de manifiesto la utilidad del corolario anterior. Dicho de una manera sugerente, los polinomios de grado menor o igual que un número natural N fijo, forman un subespacio cerrado de cualquier espacio normado que los contenga, pongamos por caso, $L_p[0,1]$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Tomando $N = 1$, $p = 2$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, obtenemos el siguiente resultado nada evidente: si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función medible y existen dos sucesiones de números reales, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f(t) - a_n - b_n t|^2 \, dt = 0,$$

entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(t) = a + bt$ para casi todo $t \in [0,1]$.

Para obtener nuevas consecuencias interesantes del Teorema de Hausdorff, necesitamos las nociones de producto y cociente de espacios normados que estudiamos a continuación.

4.2. Producto de espacios normados

Sean X e Y dos espacios normados y consideremos el espacio vectorial producto $X \times Y$. Es fácil adivinar cómo podemos definir en $X \times Y$ toda una gama de normas. Para $(x,y) \in X \times Y$ escribimos

$$\|(x,y)\|_p = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \quad (1 \leqslant p < \infty)\,; \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Se comprueba sin ninguna dificultad que, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\|\cdot\|_p$ es una norma en $X \times Y$. Las desigualdades

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \qquad \big((x,y) \in X \times Y\big)$$

nos hacen ver que todas las normas recién definidas son equivalentes, todas generan la topología producto en $X \times Y$. Es costumbre llamar **espacio normado producto** de X por Y al espacio vectorial $X \times Y$, dotado de cualquier norma que genere la topología producto, por ejemplo, cualquiera de las normas $\|\cdot\|_p$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Obsérvese que este espacio normado sólo es único salvo isomorfismos topológicos. Para estudiar propiedades que se conserven por isomorfismos topológicos esa ambigüedad no causa ningún problema. Tal cosa ocurre por ejemplo con la complitud y la siguiente caracterización se comprueba de forma rutinaria:

El espacio normado producto $X \times Y$ es completo si, y sólo si, X e Y son completos.

Resaltemos que X e Y pueden verse como subespacios cerrados de $X \times Y$, sin más que identificarlos respectivamente con $X \times \{0\}$ y $\{0\} \times Y$, lo cual explica que la complitud de $X \times Y$ implique la de X e Y.

4.3. Cociente de espacios normados

Para motivar la definición de la norma adecuada en el cociente de un espacio normado por un subespacio, podemos pensar que en un producto $X \times Y$ de espacios vectoriales, cada factor se identifica de forma natural con el cociente por el otro. Más concretamente, si notamos $\widetilde{Y} = \{0\} \times Y$, la aplicación $x \mapsto (x,0) + \widetilde{Y} = \{(x,y) : y \in Y\}$ es una biyección lineal de X sobre el espacio vectorial cociente $X \times Y/\widetilde{Y}$. Pues bien, cuando X e Y son espacios normados y en $X \times Y$ consideramos cualquiera de las normas $\|\cdot\|_p$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, observamos que la norma de cada vector $x \in X$ puede obtenerse a partir de la clase de equivalencia con la que se identifica, ya que evidentemente:

$$\|x\| = \text{mín}\{\|(x,y)\|_p : y \in Y\} = \text{mín}\{\|u\|_p : u \in x + \widetilde{Y}\}.$$

La última expresión tiene sentido para cualquier cociente, salvo que el mínimo puede no alcanzarse, pero siempre tendremos el ínfimo. Esto explica la próxima definición.

Sea X un espacio normado cualquiera y M un subespacio de X. Por razones que se verán enseguida debemos suponer que M es *cerrado* en X. Consideramos el espacio vectorial cociente X/M y para cada clase de equivalencia $x + M \in X/M$ definimos

$$\|x + M\| \;=\; \text{ínf}\{\|x + m\| : m \in M\} \;=\; \text{ínf}\{\|x - m\| : m \in M\} \;=\; d(x,M).$$

Se comprueba sin ninguna dificultad que de esta forma obtenemos una norma en X/M a la que llamamos **norma cociente**. Resaltamos que de la condición $\|x + M\| = d(x,M) = 0$ se deduce que $x \in \overline{M} = M$ y por tanto $x + M = 0$, pero este razonamiento exige que M sea cerrado en X. De no ser así, habríamos obtenido una seminorma en X/M, pero no una norma.

Para familiarizarse con la topología asociada a la norma cociente, que obviamente podemos llamar **topología cociente**, conviene usar la **aplicación cociente**

$$\pi : X \to X/M; \quad \pi(x) = x + M \;\; \forall x \in X$$

que sabemos es lineal y sobreyectiva. De la definición de la norma cociente deducimos que

$$\|\pi(x)\| \leqslant \|x\| \;\; \forall x \in X,$$

luego π *es un operador lineal continuo* con $\|\pi\| \leqslant 1$. De hecho, considerando la bola abierta unidad $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ es inmediato que $\pi(U)$ es la bola abierta unidad en X/M. Esto implica que $\|\pi\| = 1$ (salvo en el caso trivial $M = X$) pero, lo que es más importante, también implica que π *es un aplicación abierta*. En efecto, si G es un subconjunto abierto de X y tomamos $v \in \pi(G)$, existirá un $x \in G$ tal que $v = \pi(x)$ y un $r > 0$ tal que $x + rU \subseteq G$, pero entonces $\pi(G)$ contiene a $\pi(x + rU) = v + r\pi(U)$, que es la bola abierta en X/M de centro v y radio r, lo que prueba que $\pi(G)$ es abierto, como queríamos.

Sabiendo que π es continua y abierta tenemos una útil caracterización de la topología cociente: *un conjunto $V \subseteq X/M$ es abierto si, y sólo si, $\pi^{-1}(V)$ es abierto en X*. Deducimos que un conjunto $E \subseteq X/M$ es cerrado si, y sólo si, $\pi^{-1}(E)$ es cerrado en X, pero no debemos pensar que π es una aplicación cerrada. Por ejemplo, tomando $X = \mathbb{R}^2$, $M = \mathbb{R} \times \{0\}$ y $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$, es claro que C es cerrado en X, pero $\pi(C)$ no es cerrado en X/M.

Podemos ahora obtener un criterio de continuidad para aplicaciones definidas en el espacio cociente. Sea Y un espacio topológico arbitrario, $F : X/M \to Y$ cualquier función y consideremos la composición $F \circ \pi : X \to Y$. Vamos a comprobar que F es continua si, y sólo si, lo es $F \circ \pi$. La continuidad de F implica la de $F \circ \pi$, simplemente porque π es continua. Recíprocamente, si $F \circ \pi$ es continua, dado un conjunto abierto $W \subseteq Y$ tenemos que $(F \circ \pi)^{-1}(W) = \pi^{-1}(F^{-1}(W))$ es abierto en X, luego $F^{-1}(W)$ es abierto en X/M y hemos probado que F es continua.

Nótese que, para la caracterización recién probada, Y no tiene por qué ser un espacio vectorial y, aunque lo fuese, F no tiene por qué ser lineal. No obstante el caso más interesante se presenta cuando X e Y son espacios normados, $T \in L(X,Y)$ es un operador lineal continuo y tomamos $M = \ker T$, que es un subespacio cerrado de X, para hacer la factorización canónica del operador T. Sabemos que existe un único operador lineal $\widetilde{T} : X/\ker T \to Y$ tal que $T = \widetilde{T} \circ \pi$ y la caracterización probada nos dice que $\widetilde{T}$ es continuo por serlo T.

Discutimos finalmente la complitud de un cociente. Supongamos que X es un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X. Usando la caracterización de la complitud en términos de series, probaremos que X/M es un espacio de Banach.

Sea pues $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ una serie absolutamente convergente en X/M y, para cada $n \in \mathbb{N}$, usemos la definición de la norma cociente para encontrar $x_n \in X$ tal que

$$v_n = x_n + M; \quad \|x_n\| \leqslant \|v_n\| + \frac{1}{2^n}$$

Se tiene entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

luego la serie $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ es absolutamente convergente y, por la complitud de X, convergente. Usando que la aplicación cociente π es un operador lineal continuo, deducimos que

$$\pi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

es decir, la serie $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ converge, como queríamos demostrar.

En la dirección recíproca, es un buen ejercicio comprobar que la complitud de X/M implica la de X, siempre que M sea completo. En resumen, con respecto a la complitud de un cociente de espacios normados se verifica lo siguiente:

Sea X un espacio normado, M un subespacio cerrado de X y consideremos el espacio normado cociente X/M. Entonces X es completo si, y sólo si, M y X/M son completos.

4.4. Sumas topológico-directas

Estrechamente ligada a las nociones de producto y cociente de espacios vectoriales está la descomposición de un espacio vectorial como suma directa de dos subespacios. Vamos a recordar dicha descomposición para luego analizarla en el ambiente de los espacios normados.

Dado un subespacio Y de un espacio vectorial X, siempre existe otro subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$ con $Y \cap Z = \{0\}$. En efecto, dada una base A del subespacio Y, A es un conjunto de vectores linealmente independientes en X, que estará contenido en una base B, con lo que basta tomar $Z = \text{Lin}\,(B \setminus A)$. Decimos que X es **suma directa** de Y con Z, escribimos $X = Y \oplus Z$ y decimos también que Z es un **complemento algebraico** de Y en X. Obviamente, la relación es simétrica, Y es un complemento algebraico de Z en X.

La suma directa es la forma "correcta" de descomponer un espacio vectorial: recuperamos la estructura de X a partir de las inducidas en sus dos subespacios, ya que X resulta ser isomorfo al espacio vectorial producto $Y \times Z$. Más concretamente, definiendo

$$\varphi : Y \times Z \to X \,; \quad \varphi(y,z) = y + z \quad (y \in Y,\, z \in Z) \tag{1}$$

tenemos una biyección lineal de $Y \times Z$ sobre X. Las expresiones $X = Y \times Z$ y $X = Y \oplus Z$ son en esencia equivalentes, la primera enfatiza una *construcción*, mientras la segunda resalta una *descomposición*.

La inversa de la biyección lineal φ definida en (1) nos lleva a considerar las proyecciones lineales en X asociadas a la suma directa. Recordemos que una **proyección lineal** en un espacio vectorial X es un operador lineal $P : X \to X$ que verifica $P \circ P = P$. Pues bien, puesto que φ^{-1} toma valores en el producto $Y \times Z$ tendrá dos componentes a las que, vistas como aplicaciones de X en sí mismo, vamos a denotar por P y Q. Así pues, escribimos

$$\varphi^{-1}(x) = (Px, Qx) \quad (x \in X) \tag{2}$$

y es claro que obtenemos así dos proyecciones lineales en X, cada una de las cuales determina a la otra, ya que $P + Q = I$ donde I es la aplicación identidad en X. Resumiendo, la descomposición $X = Y \oplus Z$ determina una proyección lineal P en X, la única que verifica $Y = P(X)$ y $Z = \ker P$. Recíprocamente, si P es cualquier proyección lineal en X, es claro que $X = P(X) \oplus \ker P$.

La misma forma en que hemos visto que un subespacio Y siempre admite un complemento algebraico Z, muestra que Z está lejos de ser único (salvo los casos triviales $Y = X$, $Y = \{0\}$). Sin embargo, consideremos la aplicación cociente de X sobre X/Y o, más concretamente, su restricción a un complemento algebraico Z:

$$\psi : Z \to X/Y \,; \;\; \psi(z) = z + Y \quad (z \in Z). \tag{3}$$

Se comprueba inmediatamente que ψ es una biyección lineal. De hecho

$$\psi^{-1}(x + Y) = x - Px \;\; \forall x \in X. \tag{4}$$

Así pues, todos los complementos algebraicos de Y en X son isomorfos al espacio vectorial cociente X/Y, que se convierte en una especie de "complemento canónico", pues no usamos ninguna base algebraica en X o en Y para construir X/Y; cualquier descomposición de X como suma directa algebraica de Y con otro subespacio nos lleva simplemente a observar que X es isomorfo a $Y \times X/Y$.

Pues bien, ya está todo preparado para trabajar con estas nociones en espacios normados y veremos que la situación se complica (o se enriquece, según se mire). Sea X un espacio normado, descompuesto como suma directa de dos subespacios: $X = Y \oplus Z$. Queremos saber cuándo podemos decir que tenemos una descomposición correcta de X como espacio normado y no sólo como espacio vectorial.

Es evidente que en general no vamos a saber recuperar la norma de X a partir de las de Y y Z, simplemente porque en el producto $Y \times Z$ disponemos de muchas posibilidades distintas para definir una norma. Pensemos por ejemplo lo que ocurre cuando $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$, $Z = \{0\} \times \mathbb{R}$, todas las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^2$, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, coinciden obviamente tanto en Y como en Z, sin coincidir en X.

Pero volviendo al caso general, lo que sí podemos esperar es que a partir de Y y Z podamos al menos recuperar la topología de X, es decir, que al identificar X con el espacio vectorial $Y \times Z$ la topología de X se convierta en la topología producto. Puesto que dicha identificación se hace mediante la biyección lineal φ definida en (1), lo que nos preguntamos es si φ es un isomorfismo topológico del espacio normado producto $Y \times Z$ sobre X.

La cosa no empieza mal, porque φ es continua, por ser la restricción a $Y \times Z$ de la operación suma, que sabemos es continua en $X \times X$. Para la continuidad de φ^{-1} la cosa se complica: φ^{-1} será continua cuando lo sean sus dos componentes y, según (2), la primera componente es la proyección lineal P de X sobre Y, con núcleo Z; la segunda componente es $Q = I - P$ donde I denota la identidad en X. Evidentemente, P será continua si, y sólo si, lo es $I - P$, pero en general no está nada claro que estas proyecciones tengan que ser continuas. Por ejemplo, para que P sea continua es claramente necesario que $Z = \ker P$ sea cerrado, y análogamente $Y = \ker (I - P)$ deberá ser cerrado, pero en principio no habíamos supuesto que Y y Z fuesen cerrados.

Continuemos pues nuestra discusión, suponiendo a partir de ahora que Y y Z son subespacios cerrados de X. Sabemos que, como espacio vectorial, Z se identifica con el cociente X/Y mediante la biyección lineal ψ definida en (3). Considerando en X/Y la norma cociente, es lógico pedir que ψ sea al menos isomorfismo topológico, de forma que Z sea topológicamente isomorfo a X/Y. De nuevo es claro que ψ es continua, por ser la restricción a Z de la aplicación cociente $\pi : X \to X/Y$ que es continua. Aplicando el criterio de continuidad para aplicaciones definidas en el espacio normado cociente, ψ^{-1} será continua cuando lo sea $\psi^{-1} \circ \pi$, y en vista de (4) tenemos que $\psi^{-1} \circ \pi = I - P$. Por tanto, de nuevo nos encontramos con que ψ es un isomorfismo topológico si, y sólo si, las proyecciones P e $I - P$ son continuas.

Podemos ya recapitular toda la discusión anterior: *Sea X un espacio normado, descompuesto como suma directa de dos subespacios cerrados: $X = Y \oplus Z$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *La biyección lineal φ, definida en (1), es un isomorfismo topológico del espacio normado producto $Y \times Z$ sobre X.*
- *La proyección lineal $P : X \to X$ que verifica $Y = P(X)$ y $Z = \ker P$ es continua*
- *La biyección lineal ψ, definida en (3), es un isomorfismo de Z sobre el espacio normado cociente X/Y.*

Cuando se verifica una cualquiera de la condiciones anteriores (y por tanto todas), decimos que el espacio normado X es **suma topológico-directa** de Y con Z. Decimos también que Z es un **complemento topológico** de Y en X. Obviamente también Y será un complemento topológico de Z en X.

La discusión anterior pone de manifiesto que descomponer un espacio normado como suma directa de dos subespacios sólo tiene utilidad cuando la suma es topológico-directa. Por la misma razón, los complementos algebraicos de un subespacio, que sabemos siempre existen, tienen poca utilidad si no son complementos topológicos, pero no está claro que siempre existan complementos topológicos. Decimos que un subespacio cerrado Y de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe un complemento topológico de Y en X, o equivalentemente, cuando existe una proyección lineal continua P en X tal que $P(X) = Y$.

Más adelante aparecerán en abundancia ejemplos de sumas topológico-directas y, por tanto, de subespacios complementados. Para citar un ejemplo concreto de subespacio no complementado, no es demasiado difícil probar, pero tampoco es nada fácil, que c_0 no está complementado en l_∞. De hecho, la inmensa mayoría de los espacios de Banach de dimensión infinita contienen subespacios cerrados que no están complementados.

Para concluir este apartado resaltamos que si Y es subespacio complementado de un espacio normado X, todos los complementos topológicos de Y en X son topológicamente isomorfos al espacio normado cociente X/Y, así que X/Y hace el papel de modelo "canónico" de complemento topológico de Y en X, cualquier descomposición de X como suma topológico-directa de Y con otro subespacio acaba llevándonos a observar que X es topológicamente isomorfo al producto $Y \times X/Y$. Cuando Y no está complementado, siempre le podemos pedir a X/Y que sustituya en lo posible a ese complemento topológico que nos gustaría tener pero no tenemos. La abundancia de subespacios no complementados hace que el paso a cociente resulte más útil para espacios normados que para simples espacios vectoriales.

4.5. Nuevas consecuencias del Teorema de Hausdorff

Tras el paréntesis necesario para disponer del cociente de espacios normados y de las sumas topológico-directas, podemos ahora sacar más provecho al Teorema de Hausdorff. Cabe preguntarse qué ocurre con la continuidad de un operador lineal cuando, en lugar del espacio normado de partida es el de llegada el que tiene dimensión finita. La respuesta es parte del siguiente enunciado:

Corolario. *Sean X e Y espacios normados, supongamos que Y tiene dimensión finita y sea $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces:*

(a) *T es continuo si, y sólo si,* $\ker T$ *es cerrado en X.*
(b) *T es una aplicación abierta si, y sólo si, $T(X) = Y$.*

Demostración. (a) La continuidad de T implica obviamente que su núcleo es cerrado. Recíprocamente, si $\ker T$ es cerrado, podemos considerar el espacio normado cociente $X/\ker T$ y la factorización canónica de T nos proporciona un operador lineal inyectivo $\widetilde{T} : X/\ker T \to Y$ tal que $T = \widetilde{T} \circ \pi$ donde $\pi : X \to X/\ker T$ es la aplicación cociente. Ahora bien, el Teorema de

Hausdorff nos dice que $\widetilde{T}$ es continuo, porque parte de un espacio normado de dimensión finita, luego T también es continuo.

(b) Si T es una aplicación abierta, $T(X)$ es abierto en Y, lo cual implica que $T(X) = Y$, pues sabemos que en cualquier espacio normado los subespacios propios tienen interior vacío. Para el recíproco, suponiendo que $T(X) = Y$, tomamos un subespacio X_0 de X de forma que la restricción de T a X_0 sea una biyección lineal de X_0 sobre Y, a la que vamos a llamar T_0. Por el Teorema de Hausdorff, T_0 es un isomorfismo topológico, en particular es una aplicación abierta. Se deduce entonces fácilmente que también T es una aplicación abierta.

Merece la pena comentar que la afirmación (a) del corolario anterior incluye como caso particular (tomando $Y = \mathbb{K}$) algo que ya sabíamos: un funcional lineal en un espacio normado es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado. De la afirmación (b) deducimos que, en cualquier espacio normado, un funcional lineal no nulo es siempre una aplicación abierta, independientemente de que el funcional sea continuo o no.

Con respecto a subespacios complementados, el Teorema de Hausdorff nos da la siguiente información:

Corolario. *Sea X un espacio normado e Y un subespacio cerrado de X. Si Y tiene codimensión finita en X,es decir, si X/Y tiene dimensión finita, entonces Y está complementado en X. De hecho, todo complemento algebraico de Y en X es un complemento topológico.*

En efecto, sea Z cualquier complemento algebraico de Y en X y Q la proyección lineal de X sobre Z con núcleo Y. El corolario anterior nos asegura que Q continua, porque tiene núcleo cerrado e imagen de dimensión finita.

4.6. Algunos contraejemplos en dimensión infinita

Vamos a presentar algunos ejemplos para mostrar que las hipótesis de dimensión finita en el Teorema de Hausdorff y sus consecuencias son imprescindibles. Empezamos con el hecho de que en $\mathbb{K}^N$ todas las normas son equivalentes. Eso sólo ocurre en espacios de dimensión finita:

(a) *En cualquier espacio vectorial de dimensión infinita siempre hay dos normas que no son equivalentes.*

En efecto, dado un espacio vectorial X de dimensión infinita, podemos fijar una base E, expresar cada vector $x \in X$ (de manera única) como combinación lineal de elementos de E, digamos $x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k$ donde el número natural N, los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ y los vectores de la base $u_1, u_2, \ldots, u_N$, dependen de x, pero están determinados en forma única. Si definimos:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k| \ ; \quad \|x\|_\infty = \max\{|\alpha_k| : k = 1, 2, \ldots, N\},$$

y hacemos todo esto para cada $x \in X$, obtenemos dos normas en X. Es claro que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_1$, pero mirando solamente a los vectores de la base, la suma de n de ellos tiene norma 1 según

$\|\cdot\|_\infty$ y norma n según $\|\cdot\|_1$, luego una desigualdad del tipo $\|\cdot\|_1 \leqslant M\|\cdot\|_\infty$, para alguna constante $M > 0$, implicaría que el número de elementos de la base E no puede exceder de M, contra la hipótesis de que X tiene dimensión infinita. Así pues, las dos normas definidas no son equivalentes, las topologías que generan son comparables pero distintas.

Respecto a la continuidad de las aplicaciones lineales que parten de un espacio normado de dimensión finita tenemos:

(b) *En todo espacio normado de dimensión infinita existe un funcional lineal discontinuo.*

En efecto, dada una base E de un espacio normado de dimensión infinita X, como E es un conjunto infinito, contendrá un subconjunto infinito numerable $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para definir un funcional lineal f en X basta decidir los valores de f en E y podemos hacerlo con entera libertad, así que podemos tomar $f(u_n) = n\|u_n\|$ y, por ejemplo, $f(u) = 0$ para cualquier $u \in E$ que no esté en la sucesión $\{u_n\}$. Es obvio que el único funcional lineal f que cumple esas condiciones no está acotado en la esfera unidad de X, luego no es continuo.

Usando el funcional del ejemplo anterior conseguimos otro ejemplo instructivo. En efecto, fijamos un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = 1$ y definimos $T(x) = x - 2f(x)x_0$ para todo $x \in X$. Es fácil ver que T es una biyección lineal de X sobre sí mismo tal que T no es continua y T^{-1} tampoco. De hecho $T^{-1} = T$ y es claro que, si T fuese continua, también lo sería f. Esta biyección lineal T tiene clara interpretación geométrica: viendo X como suma directa del núcleo de f con $\mathbb{K}x_0$, cuando escribimos un vector $x \in X$ en la forma $x = y + \lambda x_0$, con $y \in \ker f$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, tenemos claramente que $T(x) = y - \lambda x_0$, así que T se interpreta como la simetría con respecto al hiperplano $\ker f$, claro que es difícil imaginarse esta simetría, pues dicho hiperplano es denso en X. En cualquier caso, hemos comprobado lo siguiente:

(c) *En todo espacio normado de dimensión infinita existe una biyección lineal discontinua.*

4.7. El Teorema de Riesz

El segundo resultado fundamental de este tema asegura que, prescindiendo de la estructura de espacio vectorial, la topología de un espacio normado es capaz por sí sola de decirnos si el espacio tiene o no dimensión finita. Establece por tanto la equivalencia entre una propiedad puramente topológica y una propiedad puramente algebraica.

Es sabido que en cualquier espacio métrico un subconjunto compacto es cerrado y acotado. En un espacio normado de dimensión finita, es decir, en $\mathbb{K}^N$ con cualquier norma, el Teorema de Heine-Borel-Lebesgue nos asegura que el recíproco también es cierto, todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{K}^N$ es compacto. En particular la bola cerrada unidad de cualquier espacio normado de dimensión finita es compacta y, por tanto, toda bola cerrada es compacta, luego todo punto tiene un entorno compacto, es decir, el espacio es localmente compacto. Recíprocamente, si cada punto tiene un entorno compacto es claro que las bolas cerradas serán compactas, de donde deducimos que cualquier conjunto cerrado y acotado es compacto. Pues bien, cualquiera de las propiedades comentadas caracteriza a los espacios normados de dimensión finita:

Teorema (F. Riesz, 1918). *Para un espacio normado X, la siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto*
(ii) *La bola cerrada unidad de X es compacta*
(iii) *X es localmente compacto*
(iv) *X tiene dimensión finita.*

Demostración. Ya se ha comentado la equivalencia entre las tres primeras afirmaciones y que la cuarta implica cualquiera de ellas, luego basta probar, por ejemplo, que *(ii)* $\Rightarrow$ *(iv)*.

Sea pues B la bola cerrada unidad de X, supongamos que B es compacta y sea $0 < \rho < 1$. Las bolas abiertas centradas en puntos de B y con radio ρ forman un recubrimiento de B por abiertos, del cual se podrá extraer un subrecubrimiento finito. Deducimos que existe un conjunto finito $F \subseteq B$ tal que $B \subseteq F + \rho B$. Llamando M al subespacio engendrado por F, es claro que M tiene dimensión finita y verifica:

$$B \subseteq M + \rho B. \qquad (*)$$

La demostración se concluirá probando que $X = M$. Para ello empezamos por iterar la inclusión anterior:

$$B \subseteq M + \rho B \subseteq M + \rho(M + \rho B) = M + \rho M + \rho^2 B \subseteq M + \rho^2 B,$$

de donde deducimos claramente, por inducción sobre n, que

$$B \subseteq M + \rho^n B,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in B$, la inclusión anterior nos dice que $d(x,M) \leqslant \rho^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $d(x,M) = 0$ y x está en el cierre de M. Así pues, $B \subseteq \overline{M}$, pero M es cerrado en X, por ser un subespacio de dimensión finita de un EVT separado, luego $B \subseteq M$ y esto implica claramente que $X = M$, como se quería. ■

Merece la pena resaltar la última parte de la demostración anterior, pues el hecho de que M tiene dimensión finita sólo se ha usado para asegurarnos de que M es cerrado en X. Dicho de otra forma, si suponemos que un subespacio cerrado M de X verifica la inclusión $(*)$, deducimos igualmente que $M = X$. Enunciada por el contra-recíproco, esta afirmación se conoce como **Lema clásico de Riesz:** *dado un un espacio normado X, un subespacio cerrado propio M ($\overline{M} = M \neq X$) y $0 < \rho < 1$, existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $d(x,M) > \rho$.* Cuando M tiene dimensión finita, un sencillo argumento de compacidad permite conseguir incluso $\|x\| = 1 = d(x,M)$. Esta observación permite poner de manifiesto cuán lejos está de ser compacta la bola cerrada unidad B de un espacio normado de dimensión infinita X: existe una sucesión $\{x_n\}$ en B tal que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$; cualquier sucesión parcial de $\{x_n\}$ verifica la misma condición, luego está muy lejos de ser convergente. En espacios concretos se puede encontrar sucesiones cuyos términos estén aún más separados unos de otros. Por ejemplo, la sucesión $\{e_n\}$ de los vectores unidad en l_p, con $1 \leqslant p < \infty$, verifica evidentemente que $\|e_n - e_m\|_p = 2^{1/p}$ para $n \neq m$; el caso extremo se presenta para $p = 1$.

Tema 5

Versión Analítica del Teorema de Hahn-Banach

Hay tres grandes teoremas que se conocen como los tres "Principios Fundamentales del Análisis Funcional" y todos llevan el nombre de Stefan Banach: el *Teorema de Hahn-Banach*, el *Teorema de Banach-Steinhaus* y el *Teorema de la Aplicación Abierta*, también conocido como Teorema de Banach-Schauder. El primero es una pieza clave para el estudio de la dualidad en espacios normados. Como cualquier resultado importante en Matemáticas, pero muy especialmente en este caso, el Teorema de Hahn-Banach admite numerosas versiones equivalentes, que se aplican en campos muy diversos. En este tema vemos la "versión analítica", que nos permitirá avanzar en el estudio de la dualidad. Más adelante veremos una "versión geométrica", que se caracteriza precisamente por eso, por tener clara interpretación geométrica.

5.1. Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

Antes de enunciar el teorema, el siguiente razonamiento nos proporciona una motivación. Dado un espacio normado $X \neq \{0\}$, sin más información sobre su estructura, nos gustaría probar que existen funcionales lineales continuos no nulos en X. Cuando se definió el espacio dual X^* ya se comentó que en general no podíamos probar aún que $X^* \neq \{0\}$. Si M es un subespacio de X de dimensión finita, disponemos de sobra de funcionales lineales en M y sabemos que todos ellos son continuos. La continuidad de un funcional lineal $g : M \to \mathbb{K}$ se resume en la desigualdad $|g(m)| \leqslant \|g\| \, \|m\|$, válida para cualquier $m \in M$, es decir, $|g|$ está "dominado" en M por un múltiplo de la norma de X. Si pudiésemos extender g a todo X manteniendo el mismo tipo de "dominación", tendríamos desde luego un funcional lineal continuo en X que, por extender a g, sería no nulo. Pues bien, eso es lo que, con hipótesis bastante más generales, nos garantiza el siguiente enunciado, que es la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach.

Teorema (Hahn 1927, Banach 1929). *Sea X un espacio vectorial, provisto de una función $\nu : X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones:*

$$\nu(x+y) \leqslant \nu(x)+\nu(y) \ \ \forall x,y \in X\,; \quad \nu(rx) = r\nu(x) \ \ \forall r \in \mathbb{R}^+, \ \forall x \in X$$

Sea M un subespacio vectorial de X y g un funcional lineal en M verificando:

$$\operatorname{Re} g(m) \leqslant \nu(m) \ \ \forall m \in M$$

Entonces existe un funcional lineal f en X que extiende a g, es decir,

$$f(m) = g(m) \ \ \forall m \in M,$$

y sigue verificando que

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant \nu(x) \ \ \forall x \in X.$$

Si ν es una seminorma, se tiene de hecho

$$|f(x)| \leqslant \nu(x) \ \ \forall x \in X.$$

Antes de entrar en la demostración del teorema resaltamos que las hipótesis sobre la función ν son mucho más débiles que las que definen a una norma o incluso a una seminorma; por ejemplo, no se exige que $\nu(x) = \nu(-x)$ para $x \in X$. Al parecer la versión demostrada por Hahn suponía que ν es una norma en X; esta otra versión más general es la aportación de Banach y es esencial, como se verá, para establecer las versiones geométricas del teorema. Por otra parte, usar la función "parte real" es lo que permite hacer un enunciado común para el caso real y el caso complejo; naturalmente, en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dicha función no es otra cosa que la identidad. Dividiremos la demostración en tres etapas.

5.1.1. Caso real, primera extensión

Empezamos considerando el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y sólo extendemos el funcional g al subespacio que se obtiene sumando una recta a M. Esta es, con diferencia, la etapa más importante, pero no es difícil.

Fijemos pues $x \in X$, con $x \notin M$, y consideremos el subespacio $Y = M \oplus \mathbb{R}x$. Queremos definir un funcional lineal h en Y que extienda a g y siga dominado por ν. Obviamente deberemos definir h en la forma:

$$h(m+\lambda x) = g(m) + \lambda\alpha \quad (m \in M, \lambda \in \mathbb{R}),$$

donde α (el valor de $h(x)$) es una constante a determinar, de forma que se tenga

$$g(m) + \lambda\alpha \leqslant \nu(m+\lambda x) \ \ \forall m \in M \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

con lo que h cumplirá lo que se espera de él. Puede haber la tentación de tomar $\alpha = 0$ para simplificar las cosas, pero a poco que se piense, esa elección de α puede no ser válida, así que veamos qué debe cumplir α.

Para $\lambda > 0$, dividiendo por λ y usando la segunda propiedad de ν, (1) toma la forma

$$g\left(\frac{m}{\lambda}\right) + \alpha \leqslant \nu\left(\frac{m}{\lambda} + x\right).$$

Si ahora ponemos $u = \dfrac{m}{\lambda}$ y observamos que u es un vector de M tan arbitrario como m, deducimos que α debe cumplir:

$$\alpha \leqslant \nu(u+x) - g(u) \quad \forall u \in M. \tag{2}$$

Para $\lambda < 0$ dividimos por $-\lambda$ ambos miembros de la desigualdad (1) y razonamos de forma análoga, poniendo ahora $w = -\dfrac{m}{\lambda}$, para obtener la otra condición que debe cumplir α:

$$\alpha \geqslant g(w) - \nu(w-x) \quad \forall w \in M. \tag{3}$$

Obsérvese que para $\lambda = 0$ la desigualdad (1) se cumple, por la hipótesis sobre g. En resumen, esta etapa de la demostración estará concluida si encontramos $\alpha \in \mathbb{R}$ verificando (2) y (3).

Ahora bien, para cualesquiera $u, w \in M$, tenemos por hipótesis:

$$g(u) + g(w) = g(u+w) \leqslant \nu(u+w) \leqslant \nu(u+x) + \nu(w-x),$$

donde se ha usado la desigualdad triangular que ν verifica. Equivalentemente, tenemos:

$$g(w) - \nu(w-x) \leqslant \nu(u+x) - g(u) \quad \forall w, u \in M,$$

de donde, claramente:

$$\sup\{g(w) - \nu(w-x) : w \in M\} \leqslant \operatorname{ínf}\{\nu(u+x) - g(u) : u \in M\}$$

Si ahora α es cualquier número real comprendido entre los dos miembros de la última desigualdad, es claro que se verifican (2) y (3), luego también (1), como queríamos.

Nótese que si la última desigualdad es una igualdad, sólo hay una elección posible de α. El razonamiento anterior permite en la práctica discutir la posible unicidad del funcional f cuya existencia afirma el Teorema, un asunto del que no nos vamos a ocupar.

5.1.2. Caso real, extensión definitiva

Para concluir la demostración en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lo que hacemos intuitivamente es iterar la extensión realizada en la primera etapa, aumentando en cada paso una dimensión al subespacio obtenido en la etapa anterior, hasta "llegar" a X. Naturalmente el número de etapas puede ser infinito, justo cuando X/M tenga dimensión infinita, así que esta "inducción transfinita" requiere una justificación y la formalizamos usando el Lema de Zorn. Recordemos que un **conjunto inductivo** es un conjunto ordenado en el que todo subconjunto totalmente ordenado admite un mayorante y el **Lema de Zorn** afirma que *todo conjunto inductivo tiene al menos un elemento maximal*.

Pues bien el conjunto $\mathcal{F}$ al que pretendemos aplicar el Lema de Zorn va a estar formado por todos los pares de la forma (Y,h) donde Y es un subespacio de X que contiene a M y h es un funcional lineal en Y que extiende a g y está dominado por ν. Definimos un orden en $\mathcal{F}$ escribiendo que $(Y,h) \preceq (Z,k)$ cuando $Y \subseteq Z$ y el funcional k extiende a h. Es inmediato que $\preceq$ es una relación de orden en $\mathcal{F}$ y vamos a comprobar que, con dicha relación de orden, $\mathcal{F}$ es un conjunto inductivo.

Sea pues $\mathcal{F}_0 = \{(Y_j,h_j) : j \in J\}$ un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}$ y veamos que $\mathcal{F}_0$ admite un mayorante. Para ello tomamos $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ y observamos, gracias a que $\mathcal{F}_0$ está totalmente ordenado, que Y es un subespacio vectorial de X, que evidentemente contiene a Y_j para todo $j \in J$ y, por tanto, contiene a M. Para definir un funcional lineal h en Y, dado $y \in Y$, tomamos $j \in J$ de forma que $y \in Y_j$ y escribimos $h(y) = h_j(y)$. De nuevo el hecho de que $\mathcal{F}_0$ está totalmente ordenado hace que nuestra definición de h sea correcta, es decir, el valor de $h(y)$ no depende del índice $j \in J$ que usemos para definirlo. Es inmediato que h es un funcional lineal en Y que está dominado por ν y extiende a h_j para todo $j \in J$, por tanto también extiende a g. Así pues, $(Y,h) \in \mathcal{F}$ y es claro que $(Y_j,h_j) \preceq (Y,h)$ para todo $j \in J$, luego (Y,h) es el mayorante de $\mathcal{F}_0$ que necesitábamos.

El Lema de Zorn nos proporciona un elemento maximal de $\mathcal{F}$, digamos (Z,f), y sólo queda comprobar que $Z = X$, pues entonces f será el funcional lineal en X que nos pide el teorema. En efecto, si fuese $Z \neq X$, podríamos aplicar la primera etapa de la demostración para obtener un par estrictamente mayor que (Z,f), contradiciendo su maximalidad.

Obsérvese que todo el razonamiento anterior resulta bastante rutinario, simplemente el Lema de Zorn es el instrumento que permite formalizar rigurosamente la idea de iterar un proceso indefinidamente hasta concluirlo. Conviene resaltar, sin embargo, que siempre que usamos el Lema de Zorn para formalizar un proceso infinito, nuestro razonamiento no es constructivo, no tenemos ningún control del resultado del proceso. En nuestro caso, no tenemos forma de conocer explícitamente el funcional f cuya existencia hemos probado, a diferencia de lo que ocurría con la primera etapa de la demostración, en que la construcción del funcional extendido era explícita.

5.1.3. Fin de la demostración

Para completar la prueba del Teorema nos queda considerar el caso complejo y comprobar la última afirmación del teorema (caso de que ν sea una seminorma).

El caso complejo se resuelve reduciéndolo al caso real, simplemente observando que todo espacio vectorial complejo Z es también un espacio vectorial real, al que para distinguirlo podemos notar $Z_{\mathbb{R}}$, sin más que restringir a $\mathbb{R} \times Z$ el producto por escalares que tenemos definido en $\mathbb{C} \times Z$. Para cada funcional lineal h en Z, es claro que $\operatorname{Re} h$ es un funcional lineal en $Z_{\mathbb{R}}$. Observamos además que h queda determinado por su parte real, ya que evidentemente, $\operatorname{Im} h(z) = -\operatorname{Re} h(iz)$ para todo $z \in Z$. Recíprocamente, si φ es un funcional lineal en $Z_{\mathbb{R}}$, definiendo $h(z) = \varphi(z) - i\varphi(iz)$ para todo $z \in Z$, es fácil comprobar que obtenemos un funcional lineal h en Z tal que $\operatorname{Re} h = \varphi$. En resumidas cuentas, los funcionales lineales en $Z_{\mathbb{R}}$ no son, ni más ni menos, que las partes reales de los funcionales lineales en Z.

Podemos ya resolver el caso complejo. Nos dan un espacio vectorial complejo X (automáticamente pensamos en $X_{\mathbb{R}}$) y un subespacio M de X (automáticamente pensamos que $M_{\mathbb{R}}$ es un subespacio de $X_{\mathbb{R}}$). Nos dan también un funcional lineal g en M que verifica precisamente $\operatorname{Re} g \leqslant \nu$, así que notando $\varphi = \operatorname{Re} g$ tenemos que φ es un funcional lineal en $M_{\mathbb{R}}$ que verifica $\varphi \leqslant \nu$, está dominado por ν como veníamos diciendo. Como la extensión en el caso real ya la tenemos resuelta, existirá un funcional lineal ψ en $X_{\mathbb{R}}$ que extiende a φ y sigue dominado por ν. Ahora ψ será la parte real de un funcional lineal en X, al que llamamos f. Claramente tenemos $\operatorname{Re} f(x) = \psi(x) \leqslant \nu(x)$ para todo $x \in X$ y f extiende a g, ya que para cada $m \in M$ tenemos $\operatorname{Re} f(m) = \psi(m) = \varphi(m) = \operatorname{Re} g(m)$, de donde $f(m) = g(m)$ también para todo $m \in M$, porque tanto g como la restricción de f a M están determinados por su parte real.

Sólo queda probar la última afirmación del Teorema, pero esto es muy sencillo: si ν es una seminorma y sabemos ya que $\operatorname{Re} f \leqslant \nu$, fijado un $x \in X$ ponemos $|f(x)| = \lambda f(x)$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| = 1$, y obtenemos:

$$|f(x)| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = \operatorname{Re} f(\lambda x) \leqslant \nu(\lambda x) = \nu(x),$$

donde para la tercera igualdad hemos usado que, evidentemente, $f(\lambda x) \in \mathbb{R}$ y, para la última, que ν es una seminorma.

5.2. Extensión equinórmica

El resto de este tema se dedica a los primeros corolarios del teorema recién demostrado. Nuestra primera aplicación del Teorema de Hahn-Banach consistirá en contestar afirmativamente, a plena generalidad, la pregunta que habíamos planteado como motivación:

Teorema (de extensión equinórmica). *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que f extiende a g y $\|f\| = \|g\|$.*

Por hipótesis tenemos $|g(m)| \leqslant \|g\| \|m\|$ para todo $m \in M$, luego basta aplicar el Teorema anterior, tomando $\nu(x) = \|g\| \|x\|$ para todo $x \in X$, con lo que ν es una seminorma en X. Obtenemos un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ que verifica $|f(x)| \leqslant \|g\| \|x\|$ para todo $x \in X$, luego $f \in X^*$ y $\|f\| \leqslant \|g\|$, pero es evidente que la norma de un funcional no puede disminuir al extenderlo, así que $\|f\| = \|g\|$.

El hecho de que un funcional lineal continuo en un subespacio M de un espacio normado X se extienda a un funcional lineal continuo en todo el espacio X ya es bastante importante, nos garantiza por ejemplo la abundancia de funcionales lineales continuos no nulos en cualquier espacio normado $X \neq \{0\}$, pues siempre podemos tomar como M un subespacio de dimensión finita de X, en el que tenemos abundantes funcionales lineales, todos ellos continuos. Al hacer una extensión, es claro que, en general la norma del funcional aumenta, y el último teorema nos dice que podemos hacer la extensión sin que aumente, que es lo mejor que nos podría decir. La existencia de esta extensión "equinórmica" tendrá más adelante consecuencias importantes.

Concluimos este Tema con dos aplicaciones interesantes del teorema anterior. La primera se deduce del mero hecho de que $X^* \neq \{0\}$ para cualquier espacio normado $X \neq \{0\}$. Es claro que esto nos permite definir operadores lineales continuos no nulos, de X en cualquier otro espacio normado $Y \neq \{0\}$, pues basta fijar $f_0 \in X^* \setminus \{0\}$, $y_0 \in Y \setminus \{0\}$, y definir $Tx = f_0(x)\, y_0$ para todo $x \in X$. Es evidente que $T \in L(X,Y)$ e incluso que $\|T\| = \|f_0\|\, \|y_0\|$. Aprovechando esta sencilla idea, podemos ya probar algo que quedó prometido en el Tema 3:

Corolario. *Sean $X \neq \{0\}$ e Y espacios normados. Si el espacio de operadores $L(X,Y)$ es completo, entonces Y es completo.*

En efecto, dada una sucesión de Cauchy $\{y_n\}$ en Y, fijamos $f \in X^* \setminus \{0\}$ y definimos

$$T_n x \;=\; f(x)\, y_n \quad (x \in X,\, n \in \mathbb{N}),$$

obteniendo una sucesión $\{T_n\}$ en $L(X,Y)$ que también es de Cauchy, ya que

$$\|T_n - T_m\| \;=\; \|f\|\, \|y_n - y_m\| \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Por ser $L(X,Y)$ completo, la sucesión $\{T_n\}$ convergerá en $L(X,Y)$ a un operador T. Puesto que

$$\|T_n x - T x\| \;\leqslant\; \|T_n - T\|\, \|x\| \quad (x \in X,\, n \in \mathbb{N}),$$

deducimos que la sucesión $\{T_n x\} = \{f(x)\, y_n\}$ converge en Y para todo $x \in X$, con lo que basta tomar $x \in X$ tal que $f(x) = 1$.

Como segundo ejemplo de extensión, obtenemos un resultado que es la contrapartida de otro obtenido en el tema anterior. Allí vimos que si X es un espacio normado e Y es un subespacio cerrado de X, de codimensión finita, entonces Y está complementado en X. De hecho, si Z es cualquier complemento algebraico de Y en X, se tiene que Z es un complemento topológico. Si fijamos nuestra atención en Z, es claro que tiene dimensión finita y también está complementado. Podría pensarse, por tanto, que *cualquier* subespacio Z de X, de dimensión finita, también va a estar complementado, pero eso no está del todo claro, pues para poder aplicar lo anterior necesitamos un complemento algebraico Y, que desde luego tendrá codimensión finita, pero que además ha de ser *cerrado*. Gracias al Teorema de Hahn-Banach vamos a encontrarlo.

Corolario. *Si M es un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X, entonces M está complementado en X.*

En efecto, sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ una base de M. Es claro que las coordenadas de cada vector $m \in M$ dependen linealmente de m, es decir, existen $g_1, g_2, \ldots, g_N$, funcionales lineales en M, tales que

$$m \;=\; \sum_{k=1}^{N} g_k(m)\, u_k$$

es la única expresión de cada $m \in M$ como combinación lineal de los elementos de la base. Para $k = 1, 2, \ldots, N$, puesto que Y es un espacio normado de dimensión finita tenemos $g_k \in M^*$ y el teorema anterior nos proporciona un $f_k \in X^*$ que extiende a g_k. Se comprueba sin ninguna dificultad que definiendo

$$P(x) \;=\; \sum_{k=1}^{N} f_k(x)\, u_k \quad (x \in X)$$

se obtiene una proyección lineal continua P en X tal que $P(X) = M$, luego M está complementado en X, como se quería.

Tema 6

Dualidad en Espacios Normados

La versión analítica del Teorema de Hahn-Banach nos va a permitir ahora profundizar en el estudio de la dualidad. Empezaremos viendo cómo a partir del dual de un espacio normado podemos describir los duales de subespacios y cocientes. Veremos también que todo espacio normado puede identificarse con un subespacio de su segundo dual y aparecerán los espacios de Banach reflexivos, para los que existe total simetría entre el espacio y su dual.

6.1. Dual de un subespacio

El teorema de extensión equinórmica, probado en el tema anterior, sugiere que analicemos la relación entre el dual X^* de un espacio normado X y el dual M^* de un subespacio M de X. Para cada $f \in X^*$, denotemos por $R(f)$ a la restricción de f a M. Es evidente que R es un operador lineal continuo de X^* en M^*; de hecho, es claro que $\|R(f)\| \leqslant \|f\|$ para todo $f \in X^*$. El mencionado teorema nos dice que $R(X^*) = M^*$, pues dado $g \in M^*$ nos proporciona un $f \in X^*$ que extiende a g, es decir, que verifica $R(f) = g$.

Miramos ahora al núcleo de R, que obviamente está formado por los funcionales lineales continuos en X que se anulan en M; se le llama **anulador** de M y se le denota por M°:

$$M^\circ = \big\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \big\}.$$

Es claro que M° es un subespacio cerrado de X^* (por ejemplo, porque $M^\circ = \ker R$). Podemos pasar ahora R al cociente por su núcleo, obteniendo otro operador $\Phi : X^*/M^\circ \to M^*$ que ya es biyectivo. Resaltamos la definición de Φ:

$$\Phi(f + M^\circ) = R(f) \qquad (f + M^\circ \in X^*/M^\circ).$$

Pues bien, vamos a comprobar que Φ es isométrico, lo que nos permitirá identificar totalmente M^* con X^*/M°. En efecto, dados $f \in X^*$ y $h \in M^\circ$ tenemos claramente:

$$\|\Phi(f + M^\circ)\| = \|R(f + h)\| \leqslant \|f + h\|,$$

y recordando la definición de la norma cociente, $\|\Phi(f+M^\circ)\| \leqslant \|f+M^\circ\|$. Para obtener la desigualdad contraria usamos una extensión equinórmica. Más concretamente, el funcional $R(f) \in M^*$ se extiende a todo el espacio X conservando la norma, es decir, existe $\tilde{f} \in X^*$ (no tiene por qué ser $\tilde{f} = f$) tal que $R(\tilde{f}) = R(f)$ y $\|\tilde{f}\| = \|R(f)\|$. Es claro que $\tilde{f} \in f + M^\circ$ y concluimos:

$$\|f+M^\circ\| \leqslant \|\tilde{f}\| = \|R(f)\| = \|\Phi(f+M^\circ)\| \leqslant \|f+M^\circ\|. \qquad (*)$$

Así pues, Φ es isométrico y podemos enunciar:

Corolario (Dual de un subespacio). *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y M° su anulador. Para cada $f \in X^*$, denotemos por $R(f)$ a la restricción de f a M. Entonces M° es un subespacio cerrado de X^* y definiendo:*

$$\Phi(f+M^\circ) = R(f) \qquad (f+M^\circ \in X^*/M^\circ)$$

se obtiene un isomorfismo isométrico Φ de X^*/M° sobre M^*. En resumen:

$$M^* \equiv X^*/M^\circ$$

6.2. Mejor aproximación en un espacio dual

La demostración del corolario anterior contiene una información que conviene resaltar, ya que tiene gran utilidad en la Teoría de Aproximación. Observemos que la desigualdad que aparece en $(*)$ acabó siendo una igualdad. Más concretamente, dado $f \in X^*$, hemos encontrado $\tilde{f} \in f + M^\circ$ tal que $\|\tilde{f}\| = \|f+M^\circ\|$, es decir, el ínfimo que define la norma cociente es un mínimo. Si ahora ponemos $h = f - \tilde{f} \in M^\circ$, es claro que

$$d(f,h) = \|f-h\| = \|\tilde{f}\| = \|f+M^\circ\| = d(f,M^\circ),$$

es decir, la distancia de f a M° se "materializa" en el punto h, o bien h es un punto de M° que está a la mínima distancia de f; se dice que h es una "mejor aproximación" de f en M°.

Expliquemos brevemente el lenguaje que se utiliza en Teoría de Aproximación. Sea Y un espacio métrico, con distancia d, y sea Z un subconjunto no vacío de Y. Para cada $y \in Y$, se llama **conjunto de mejores aproximaciones** de y en Z al conjunto $P_Z(y)$ (posiblemente vacío) dado por:

$$P_Z(y) = \{z \in Z : d(y,z) = d(y,Z)\},$$

es decir, el conjunto de los puntos de Z cuya distancia a y es la mínima posible. Cuando $P_Z(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in Y$, se dice que Z es un subconjunto **proximinal** en Y. Obsérvese que, para que esto pueda ocurrir, Z ha de ser cerrado en Y.

Pues bien, gracias al Teorema de Hahn-Banach hemos probado que, para todo subespacio M de un espacio normado X, *M° es un subespacio proximinal* de X^*. De hecho, para cada $f \in X^*$, las mejores aproximaciones de f en M° que hemos encontrado son los funcionales de la forma $h = f - \tilde{f}$ donde $\tilde{f}$ es una extensión equinórmica (se suele decir una **extensión Hahn-Banach**) de la restricción de f a M.

Recíprocamente, si $h \in P_{M^\circ}(f)$, tendremos $\|f-h\| = d(f,M^\circ) = \|R(f)\|$ luego $\tilde{f} = f-h$ es una extensión Hahn-Banach de $R(f)$ que evidentemente verifica $h = f - \tilde{f}$.

Podemos decir que hacer extensiones Hahn-Banach de funcionales lineales continuos en M es lo mismo que obtener mejores aproximaciones en M° de funcionales lineales continuos en X. Tendremos única mejor aproximación cuando tengamos única extensión Hahn-Banach y conviene recordar que la unicidad de dicha extensión se puede discutir explícitamente, mirando la primera etapa en la demostración de la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach. Comentemos finalmente que el resultado obtenido parece aplicarse sólo a una situación muy especial, el anulador de un subespacio de un espacio normado como subconjunto del espacio dual, pero conviene recordar que muchos de los espacios de Banach que venimos manejando son espacios duales.

6.3. Caracterización dual del cierre de un subespacio

Vamos a profundizar aún más en la relación entre un subespacio M de un espacio normado X y su anulador M°. Es claro que todo funcional lineal continuo en X que se anule en M también se anula en el cierre de M, es decir, $M^\circ = \left(\overline{M}\right)^\circ$, luego M no puede quedar determinado por M°, salvo que sea cerrado. La siguiente consecuencia del Teorema de Hahn-Banach nos hará ver que M° siempre determina a $\overline{M}$. Por tanto, cuando M sea cerrado en X, el propio M quedará determinado por M°.

Corolario. *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \overline{M}$, es decir, $d(x_0,M) > 0$. Entonces existe $f \in M^\circ$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = d(x_0,M)$. Como consecuencia se tiene:*

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^\circ} \ker f.$$

En efecto, poniendo $\nu(x) = d(x,M)$ para todo $x \in X$, tenemos una seminorma ν en X, y definiendo $g(\lambda x_0) = \lambda \nu(x_0)$ obtenemos un funcional lineal en $\mathbb{K}x_0$ que claramente verifica $|g| \leqslant \nu$. El Teorema de Hahn-Banach nos da un funcional lineal f en X que extiende a g y verifica también $|f| \leqslant \nu$. Comprobamos enseguida que f es el funcional que buscamos. En efecto, por ser

$$|f(x)| \leqslant \nu(x) = d(x,M) \leqslant \|x\| \quad (x \in X),$$

tenemos que f es continuo, con $\|f\| \leqslant 1$, y f se anula en M, es decir $f \in M^\circ$; como f extiende a g, también tenemos $f(x_0) = d(x_0,M)$. Finalmente, para cualquier $m \in M$, podemos escribir

$$d(x_0,M) = f(x_0) = f(x_0 - m) \leqslant \|f\| \, \|x_0 - m\|,$$

con lo que la arbitrariedad de m nos permite concluir que $\|f\| = 1$. La igualdad final del enunciado es inmediata, ya que $\overline{M} \subseteq \ker f$ para todo $f \in M^\circ$ y recíprocamente, para $x_0 \notin \overline{M}$ hemos encontrado $f \in M^\circ$ tal que $x_0 \notin \ker f$. Conviene resaltar una consecuencia que se usa a menudo: *M es denso en X si, y sólo si, $M^\circ = \{0\}$*. Por lo demás, queda claro que, si M es cerrado, entonces M está determinado por M°, ya que para un vector $x \in X$ se tendrá que $x \in M$ si, y sólo si, $f(x) = 0$ para todo $f \in M^\circ$.

6.4. Dual de un cociente

Vemos ahora una descripción del dual de un cociente que es la contrapartida a la del dual de un subespacio, hecha anteriormente. Esta descripción no utiliza el Teorema de Hahn-Banach y se podía haber hecho bastante antes:

Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X, consideremos el espacio normado cociente X/M y la aplicación cociente π. Para cada $g \in (X/M)^*$ podemos definir $\Psi(g) = g \circ \pi$; es evidente que $\Psi(g) \in X^*$ y de hecho que $\Psi(g) \in M^\circ$. Usando que la bola abierta unidad de X/M es la imagen por π de la bola abierta unidad de X, comprobamos fácilmente que $\|\Psi(g)\| = \|g\|$. Finalmente, dado $h \in M^\circ$, escribiendo $g(x+M) = h(x)$, es inmediato comprobar que g está bien definido, es un funcional lineal continuo en X/M y, claramente, $\Psi(g) = h$. Así que hemos probado lo siguiente:

Proposición (Dual de un cociente). *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X, consideremos el espacio normado cociente X/M y la aplicación cociente $\pi : X \to X/M$. Definiendo:*

$$\Psi(g) = g \circ \pi \qquad \big(g \in (X/M)^*\big)$$

se obtiene un isomorfismo isométrico Ψ de $(X/M)^*$ sobre M°, simbólicamente:

$$(X/M)^* \equiv M^\circ$$

6.5. Inyección canónica en el bidual

La abundancia de funcionales lineales continuos en un espacio normado se pone muy claramente de manifiesto en el siguiente enunciado:

Corolario. *Si X es un espacio normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\|$.*

En realidad esto es caso particular de un corolario anterior, pero el razonamiento es tan sencillo que merece repetirse: definiendo $g(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$ tenemos claramente que $g \in (\mathbb{K}x_0)^*$ y $\|g\| = 1$, con lo que basta tomar como f cualquier extensión Hahn-Banach de g.

El corolario anterior nos informa de que el espacio de Banach X^* determina la norma de X. Más concretamente, nos dice que:

$$\|x\| \;=\; \text{máx}\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| \leqslant 1\} \quad (x \in X) \qquad \diamondsuit$$

Esta igualdad está en clara "dualidad" con la definición de la norma dual:

$$\|f\| \;=\; \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leqslant 1\} \quad (f \in X^*).$$

Para resaltar esta simetría, cambiamos a partir de ahora la notación, usaremos x^* para denotar a los elementos de X^*, viéndolos más como "vectores" de X^* que como funcionales en X. Fijado un $x \in X$, podemos considerar la aplicación $x^* \mapsto x^*(x)$, que evidentemente es un funcional lineal en X^*, el *funcional de evaluación en x*. La desigualdad $|x^*(x)| \leqslant \|x\| \, \|x^*\|$ nos dice que dicho funcional es continuo, es decir, es un elemento del **bidual** X^{**} de X, un espacio de Banach que hasta ahora no habíamos considerado, pero que no necesita definición, es simplemente el espacio dual de X^*.

Así pues, cada elemento x de un espacio normado X, da lugar a un elemento de X^{**}, el funcional de evaluación en x, al que vamos a denotar por $J(x)$; la definición formal es

$$[J(x)](x^*) = x^*(x) \qquad (x^* \in X^*).$$

Tenemos ahora una aplicación $J : X \to X^{**}$, que evidentemente es lineal. La igualdad $\diamondsuit$ nos dice que J es isométrica:

$$\|J(x)\| = \sup\{|[J(x)](x^*)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| \leqslant 1\} = \|x\|.$$

Se dice que J es la **inyección canónica** del espacio normado X en su bidual y hemos visto que J identifica totalmente a X con un subespacio de X^{**}, simbólicamente: $X \equiv J(X)$. Es lógico preguntarse si ese subespacio es el total, con lo que tendríamos total simetría entre X y X^*.

Enseguida nos damos cuenta de que, en general, $J(X)$ puede no coincidir con X^{**}, simplemente porque X^{**} siempre es un espacio de Banach mientras que X (equivalentemente $J(X)$) puede no ser completo. Esta sencilla observación tiene su utilidad, ya que nos permite conseguir de forma muy elegante la completación de X, con sólo tomar el cierre de $J(X)$ en X^{**}. Es evidente que $\overline{J(X)}$ es un espacio de Banach que contiene un subespacio denso, $J(X)$, que es isométricamente isomorfo a X, luego $\overline{J(X)}$ es la **completación** de X. En resumen, la dualidad nos da una forma muy cómoda y elegante de construir la completación de un espacio normado, sin usar la completación del espacio métrico, extender las operaciones y la norma, etc.

Hecha la observación anterior, para un espacio de Banach X nos volvemos a preguntar si J es sobreyectiva y veremos enseguida que la respuesta puede ser afirmativa o negativa, dependiendo de X. Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$. En tal caso, naturalmente, J es un isomorfismo isométrico de X *sobre* X^{**}, podemos escribir $X \equiv X^{**}$ y tenemos total simetría entre X y X^* ya que el espacio dual de X^* *vuelve a ser* X.

Los ejemplos más sencillos de espacios de Banach reflexivos son los de dimensión finita: es claro que si X tiene dimensión finita N, entonces también X^*, y por tanto X^{**}, tiene dimensión N, luego la aplicación J, que es inyectiva, tiene que ser sobreyectiva. Así pues, *todo espacio de Banach de dimensión finita es reflexivo,* aunque es obvio que la noción de reflexividad no se inventó para trabajar con espacios de dimensión finita. Enseguida aparecerán más ejemplos.

6.6. Transposición de operadores

Los espacios l_p, con $1 < p < \infty$, son claros candidatos a espacios de Banach reflexivos. En efecto, sabemos que l_p^* se identifica con l_{p^*}, luego l_p^{**} deberá identificarse con $(l_{p^*})^*$, que a su vez, por ser $(p^*)^* = p$, se identifica con l_p. Luego tendremos un isomorfismo isométrico de l_p sobre su bidual: $l_p \equiv l_p^{**}$. Sin embargo, esto aún no demuestra que l_p es reflexivo, debemos construir explícitamente el isomorfismo isométrico de l_p sobre su bidual que hemos sugerido y comprobar (como de hecho ocurre) que se trata de la inyección canónica. Para ello, a poco que se piense, falta saber cómo podemos definir explícitamente un isomorfismo isométrico entre dos espacios duales X^* e Y^* a partir de un isomorfismo isométrico entre los espacios X e Y. Eso se consigue mediante la transposición de operadores, un procedimiento que, en un contexto mucho más general, vamos a explicar ahora.

Sean X e Y dos espacios normados y T un operador lineal continuo de X en Y, es decir, $T \in L(X,Y)$. Podemos componer T con cualquier funcional $y^* \in Y^*$, y es obvio que $y^* \circ T \in X^*$. Obtenemos así una aplicación $y^* \mapsto y^* \circ T$, de Y^* en X^*, que vamos a denotar por T^*. Obsérvese que la definición de T^* se resume de la siguiente forma:

$$[T^*y^*](x) \;=\; y^*(Tx) \qquad (x \in X,\, y^* \in Y^*). \tag{†}$$

Es evidente que T^* es un operador lineal y comprobamos enseguida que es continuo. Para $y^* \in Y^*$ fijo, tenemos:

$$|[T^*y^*](x)| = |y^*(Tx)| \leqslant \|y^*\|\,\|Tx\| \leqslant \|y^*\|\,\|T\|\,\|x\| \qquad (x \in X),$$

luego $\|T^*y^*\| \leqslant \|T\|\,\|y^*\|$ para todo $y^* \in Y^*$, y tenemos $T^* \in L(Y^*,X^*)$, junto con la estimación $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. Usando el Teorema de Hahn-Banach, más concretamente el corolario visto en el apartado anterior, comprobamos que dicha estimación es óptima:

$$\begin{aligned} \|T^*\| \;&=\; \sup\{\|T^*y^*\| : \|y^*\| \leqslant 1\} \;=\; \sup\big\{|y^*(Tx)| : \|x\| \leqslant 1,\, \|y^*\| \leqslant 1\big\} \\ &=\; \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqslant 1\} \;= \|T\|. \end{aligned}$$

En resumen, para cada $T \in L(X,Y)$, la igualdad (†) define un operador $T^* \in L(Y^*,X^*)$ tal que $\|T^*\| = \|T\|$. Se dice que T^* es el **operador transpuesto** de T. Operador *adjunto* y operador *dual* son otras denominaciones que también se utilizan.

Algunas propiedades del operador T^* se caracterizan fácilmente en términos de T. Por ejemplo, es fácil comprobar que $\ker T^* = T(X)^\circ$, así que T^* es inyectivo si, y sólo si, $T(X)$ es denso en Y. Otras propiedades que nos interesan se obtendrán fácilmente usando la composición de operadores.

Sean pues X, Y, Z, espacios normados, $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$. Se deduce directamente de la definición del operador transpuesto que:

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*.$$

Supongamos entonces que T es un isomorfismo topológico de X sobre Y, es decir T es biyectivo y $T^{-1} \in L(Y,X)$. Denotando por Id_E al operador identidad en cualquier espacio normado E, tenemos claramente,

$$\mathrm{Id}_{X^*} = (\mathrm{Id}_X)^* = (T^{-1} \circ T)^* = T^* \circ (T^{-1})^*$$

y de manera análoga, $\mathrm{Id}_{Y^*} = (T^{-1})^* \circ T^*$, con lo que hemos probado que T^* es biyectivo y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ es continuo, luego T^* es un isomorfismo topológico de Y^* sobre X^*. Si T es de hecho un isomorfismo isométrico, de la igualdad $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$ deducimos que $\|T^*\| = \|(T^*)^{-1}\| = 1$, es decir, T^* también es un isomorfismo isométrico.

Ahora podemos justificar rigurosamente la reflexividad de los espacios l_p con $1 < p < \infty$. Conocemos explícitamente un isomorfismo isométrico $S : l_{p^*} \to l_p^*$; concretamente,

$$[Sy](x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \qquad (x \in l_p,\, y \in l_{p^*}).$$

Por tanto $S^* : l_p^{**} \to (l_{p^*})^*$ es igualmente un isomorfismo isométrico. Pero también tenemos un isomorfismo isométrico $T : l_p \to (l_{p^*})^*$, cuya definición es formalmente la misma que la de S, sólo que intercambiando p con p^*:

$$[Tx](y) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \qquad (y \in l_{p^*},\, x \in l_p).$$

Entonces, la composición $(S^*)^{-1} \circ T$ es un isomorfismo isométrico de l_p sobre l_p^{**}. Debemos comprobar que $(S^*)^{-1} \circ T$ es precisamente la inyección canónica J de l_p en su bidual; equivalentemente, es más directo comprobar que $S^* \circ J = T$. Pero esto es casi evidente, ya que, para cualesquiera $x \in l_p$ e $y \in l_{p^*}$ tenemos:

$$[(S^* \circ J)(x)](y) = [J(x)](Sy) = [Sy](x) = [Tx](y).$$

Así pues, hemos probado que J es sobreyectiva, es decir, que *para* $1 < p < \infty$*,* l_p *es un espacio de Banach reflexivo.*

Un razonamiento totalmente análogo al anterior permite probar que, para cualquier subconjunto medible Ω de $\mathbb{R}^N$ con medida de Lebesgue positiva, *el espacio de Banach* $L_p(\Omega)$*, con* $1 < p < \infty$*, es reflexivo.*

Pero volviendo a los espacios de sucesiones y razonando de forma similar a como lo hemos hecho con los espacios l_p, comprobamos sin dificultad que *el espacio de Banach* c_0 *no es reflexivo*. En efecto, empezamos con un isomorfismo isométrico $S : l_1 \to c_0^*$, formalmente con la misma definición que antes:

$$[Sy](x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \qquad (x \in c_0,\, y \in l_1),$$

luego S^* es un isomorfismo isométrico de c_0^{**} sobre l_1^*. Pero, aquí está la novedad, l_1^* no se identifica con c_0 sino con l_∞: tenemos un isomorfismo isométrico $T : l_\infty \to l_1^*$, dado por

$$[Tz](y) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)\,z(n) \qquad (y \in l_1,\, z \in l_\infty).$$

Si llamamos I a la inclusión natural de c_0 en l_∞ y J a la inyección canónica de c_0 en su bidual, lo que ahora tenemos, para cualesquiera $x \in c_0$, $y \in l_1$, es:

$$[(S^* \circ J)(x)](y) = [Jx](Sy) = [Sy](x) = [T(I(x))](y),$$

es decir, $S^* \circ J = T \circ I$, o equivalentemente, $J = (S^*)^{-1} \circ T \circ I$. La interpretación de esta última igualdad es clara, cuando identificamos c_0^{**} con l_∞ mediante el isomorfismo isométrico $(S^*)^{-1} \circ T$, la inyección canónica J se convierte en la inclusión natural I. Naturalmente J no puede ser sobreyectiva, porque I no lo es. Así pues, c_0 es el primer ejemplo (y el más sencillo) de espacio de Banach no reflexivo.

6.7. Reflexividad de subespacios y cocientes

En lo que sigue consideramos un subespacio cerrado M de un espacio de Banach X y vamos a comentar la relación entre la reflexividad de X, la de M y la del cociente X/M, sin entrar en los detalles de las demostraciones. Recordemos las descripciones de los duales de subespacios y cocientes obtenidas anteriormente:

$$M^* \equiv X^*/M^\circ \quad \text{y} \quad (X/M)^* \equiv M^\circ$$

Deducimos entonces que

$$M^{**} \equiv (X^*/M^\circ)^* \quad \text{y} \quad (X/M)^{**} \equiv (M^\circ)^*$$

Pero aplicando a M°, como subespacio cerrado de X^*, las descripciones del dual de un subespacio y un cociente, obtenemos también que

$$(M^\circ)^* \equiv X^{**}/M^{\circ\circ} \quad \text{y} \quad (X^*/M^\circ)^* \equiv M^{\circ\circ}$$

Así pues, tenemos finalmente

$$M^{**} \equiv M^{\circ\circ} \quad \text{y} \quad (X/M)^{**} \equiv X^{**}/M^{\circ\circ}$$

donde, naturalmente, $M^{\circ\circ}$, segundo anulador de M, no es otra cosa que el anulador de M°, un subespacio cerrado de X^{**}.

Intuitivamente es fácil ahora adivinar lo que ocurre con la reflexividad. Si X es reflexivo, al identificar X^{**} con X, la caracterización dual del cierre de un subespacio nos dice que $M^{\circ\circ}$ se va a identificar con M, es decir, M^{**} se va a identificar con M, luego intuimos que M es reflexivo. De forma análoga, vemos que $X^{**}/M^{\circ\circ}$ se va a identificar con X/M, luego intuimos también que X/M es reflexivo.

Naturalmente, los comentarios anteriores no constituyen una demostración rigurosa, sólo indican la forma de hacerla, que consistirá en calcular explícitamente todos los isomorfismos isométricos que se han mencionado y aclarar la relación con las inyecciones canónicas de los espacios de Banach X, M y X/M. Hecho ese trabajo se puede conseguir una información adicional: si M y X/M son reflexivos, se prueba que X es reflexivo. Omitimos los detalles, que son laboriosos pero no difíciles, y enunciamos simplemente el resultado que puede probarse con las ideas sugeridas:

Proposición (Reflexividad de subespacios y cocientes). *Sea X un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X. Entonces X es reflexivo si, y sólo si, M y X/M son reflexivos.*

La Proposición anterior, nos da nuevos ejemplos de espacios de Banach reflexivos: todos los subespacios cerrados y todos los cocientes de l_p (o de $L_p(\Omega)$) con $1 < p < \infty$. También nos da nuevos ejemplos de espacios de Banach no reflexivos: *el espacio c de las sucesiones convergentes y el espacio l_∞ de las sucesiones acotadas son espacios de Banach no reflexivos*, puesto que c_0 no es reflexivo y es un subespacio cerrado de ambos.

6.8. Reflexividad del dual

Vamos a estudiar ahora la relación entre la reflexividad de un espacio de Banach X y la del dual X^*, obteniendo que son equivalentes. Usamos un razonamiento debido a J. Dixmier, que tiene interés en sí mismo.

Sea pues X un espacio normado, consideremos la inyección canónica $J_X : X \to X^{**}$ y el operador transpuesto $J_X^* : X^{***} \to X^*$. Cada $x^{***} \in X^{***}$ es un funcional lineal continuo en X^{**} e intuitivamente, $J_X^*(x^{***})$ no es más que la restricción de x^{***} a X cuando vemos X como subespacio de X^{**}. Por otra parte tenemos J_{X^*}, la inyección canónica de X^* en su bidual, que lo que hace, también intuitivamente, es extender funcionales definidos en X a todo el espacio X^{**}. No debe extrañarnos que al restringir un funcional que previamente hemos extendido obtengamos el funcional de partida, es decir, que se tenga

$$J_X^* \circ J_{X^*} = \mathrm{Id}_{X^*}$$

cosa que efectivamente sucede, como es fácil comprobar.

Si ahora hacemos la composición en orden contrario y definimos

$$P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$$

es fácil ver que P_X es una proyección lineal en X^{***} que se conoce como la **proyección de Dixmier** determinada por el espacio normado X. Claramente, la imagen de P_X es $J_{X^*}(X^*)$ y su núcleo es $\ker J_X^* = J_X(X)^\circ$, el anulador de X cuando le vemos como subespacio de X^{**}. Tenemos pues la siguiente descomposición de X^{***} en suma directa:

$$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus J_X(X)^\circ, \tag{‡}$$

válida para cualquier espacio normado X. Además, es claro que la proyección de Dixmier es continua, luego la suma es topológico-directa. Podemos ya probar:

Proposición (Reflexividad del dual). *Un espacio de Banach X es reflexivo si, y sólo si, X^* es reflexivo.*

En efecto, si X es reflexivo, tenemos $J_X(X) = X^{**}$, luego $J_X(X)^\circ = \{0\}$ y deducimos de (‡) que $J_{X^*}(X^*) = X^{***}$, es decir, X^* es reflexivo. Recíprocamente, si X^* es reflexivo, (‡) nos dice que $J_X(X)^\circ = \{0\}$ y deducimos que $J_X(X)$ es denso en X^{**}, pero también es cerrado por ser X un espacio de Banach, luego $J_X(X) = X^{**}$ y X es reflexivo.

Aplicando la proposición anterior obtenemos que l_1 *no es reflexivo,* puesto que $l_1 \equiv c_0^*$ y sabemos que c_0 no es reflexivo. La misma conclusión habríamos obtenido usando que $l_1^* \equiv l_\infty$ no es reflexivo.

Pensemos cómo son los sucesivos duales de un espacio de Banach X. Denotando por $X^{(n)}$ al n-ésimo dual de X, es claro que cuando X es reflexivo esta sucesión sólo tiene dos términos significativos, ya que $X^{(n)} \equiv X$ o $X^{(n)} \equiv X^*$, según sea n par o impar. Por el contrario, cuando X no es reflexivo tenemos dos sucesiones estrictamente crecientes de espacios de Banach, pues identificando cada espacio con la imagen de su inyección canónica tenemos $X \subset X^{(2)} \subset X^{(4)} \ldots$ y también $X^* \subset X^{(3)} \subset X^{(5)} \ldots$, siendo todas las inclusiones estrictas.

Tema 7

Versión Geométrica del Teorema de Hahn-Banach

En este Tema abordamos la interpretación geométrica del Teorema de Hahn-Banach, que consistirá en encontrar condiciones suficientes para "separar" dos subconjuntos de un espacio vectorial. Empezaremos aclarando en qué consiste esta separación y qué tipo de resultados podemos esperar. Obtendremos un teorema general de separación de conjuntos convexos en espacios vectoriales, que es equivalente a la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach. Deduciremos consecuencias interesantes para espacios normados.

7.1. Motivación

En términos muy genéricos podríamos decir que el estudio de la dualidad pretende obtener información sobre un espacio a partir de su dual. Hemos visto ya algunos ejemplos: dado un espacio normado X, y puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$; podemos decir que el funcional f separa (distingue) x de y, o también que X^* separa los puntos de X. Para poner un ejemplo igualmente conocido pero menos evidente, dado un subespacio cerrado M de X y un punto $x_0 \in X \setminus M$, sabemos que existe $f \in X^*$ tal que $f(M) = \{0\}$ mientras que $f(x_0) \neq 0$; también en este caso, el funcional f separa el punto x_0 del subespacio M.

Planteemos la noción de separación de una forma muy general. Sea X un espacio vectorial real en el que no consideramos norma alguna. Dados dos subconjuntos $A, B \subset X$, no vacíos y disjuntos, podemos preguntarnos si los funcionales lineales en X son capaces de separar o distinguir A de B, es decir si podemos encontrar un funcional lineal f en X verificando que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Considerando el caso particular $X = \mathbb{R}^2$, que es el caso no trivial más sencillo posible, concretamos mejor nuestra pregunta. En efecto, a poco que A y B sean conexos, que no es mucho pedir, la continuidad de f hace que los conjuntos $f(A)$ y $f(B)$ sean intervalos en $\mathbb{R}$ y sólo podrán ser disjuntos cuando se tenga $f(a) < f(b)$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, o bien la desigualdad contraria, que se convierte en la misma cambiando f por $-f$. Deducimos que

$$\sup f(A) \leqslant \inf f(B). \tag{1}$$

Aunque esta desigualdad no garantiza que los intervalos $f(A)$ y $f(B)$ sean disjuntos, en principio podemos conformarnos con un funcional lineal que verifique (1), exigiendo que $f \neq 0$ para evitar trivialidades. Tomando γ de forma que $\sup f(A) \leqslant \gamma \leqslant \inf f(B)$, la desigualdad (1) equivale a

$$f(a) \leqslant \gamma \leqslant f(b) \quad (a \in A, b \in B). \tag{2}$$

La interpretación geométrica es clara: la recta de ecuación $f(x) = \gamma$ deja el conjunto A a un lado y el conjunto B al otro. Podemos entender que el funcional $f \neq 0$ separa los conjuntos A y B cuando se cumple (1), equivalentemente, cuando existe $\gamma \in \mathbb{R}$ verificando (2). Buscamos entonces condiciones sobre los conjuntos A y B que nos permitan separarlos. Con ejemplos muy sencillos observamos que debemos suponer que A y B son *convexos*.

Volviendo al caso general, si A y B son dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos de un espacio vectorial real X, nos preguntamos si podemos **separar** A y B, es decir, si existe un funcional lineal $f \neq 0$ en X verificando (1), o equivalentemente (2) para algún $\gamma \in \mathbb{R}$. La interpretación geométrica sigue siendo muy clara: el hiperplano (afín) de ecuación $f(x) = \gamma$ deja el conjunto A a un lado y el conjunto B al otro.

Antes de discutir la respuesta a la pregunta recién planteada, conviene considerar también el caso complejo, que no ofrece dificultad. Si X es un espacio vectorial complejo, siempre podemos considerar el espacio real subyacente $X_{\mathbb{R}}$ y ver A y B como subconjuntos convexos de $X_{\mathbb{R}}$. Si conseguimos separarlos en $X_{\mathbb{R}}$, puesto que los funcionales lineales en $X_{\mathbb{R}}$ no son más que las partes reales de los funcionales lineales en X, tendremos un funcional lineal $f \neq 0$ en X verificando que $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$, o equivalentemente,

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad (a \in A, b \in B),$$

para algún $\gamma \in \mathbb{R}$. La interpretación geométrica es tan sugestiva o más que en el caso real: podemos pensar que el funcional $f : X \to \mathbb{C}$ nos da una imagen de X en el plano, con los conjuntos $f(A)$ y $f(B)$ a distinto lado de una recta vertical. Nótese que la existencia de un tal f no es evidente ni aún en el caso $X = \mathbb{C}$. En resumen, queda claro que el caso complejo de nuestro problema tiene perfecto sentido, pero su discusión se reduce al caso real.

Pues bien, vamos a ver con un ejemplo que la respuesta a la pregunta planteada puede ser negativa: *no siempre podemos separar dos conjuntos convexos disjuntos.* En efecto, consideremos el espacio vectorial $X = c_{00}$ de las sucesiones de soporte finito y sea A el subconjunto formado por las sucesiones cuyo último término no nulo es estrictamente positivo. Usando la sucesión de vectores unidad $\{e_n\}$, el conjunto A tiene la siguiente descripción:

$$A = \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k : N \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \alpha_N > 0 \Big\}.$$

El otro conjunto convexo es simplemente $B = \{0\}$ y vamos a comprobar que es imposible separar A y B, equivalentemente, todo funcional lineal no nulo f en X toma en A valores estrictamente positivos y estrictamente negativos. En efecto, por ser $f \neq 0$ existirá un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(e_n) \neq 0$ y, cambiando f por $-f$ si fuera necesario, podemos suponer que $f(e_n) > 0$. Entonces, tomando $\alpha > 0$ suficientemente grande, tenemos $f(e_{n+1}) - \alpha f(e_n) < 0$ y hemos encontrado dos puntos de A, concretamente e_n y $-\alpha e_n + e_{n+1}$, en los que f toma valores de distinto signo.

Resaltemos que el espacio vectorial X del contraejemplo anterior tiene dimensión infinita. Veremos que en dimensión finita la pregunta planteada tiene respuesta afirmativa. Por otra parte, la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach nos va a dar una condición suficiente para separar dos subconjuntos convexos no vacíos y disjuntos de un espacio vectorial cualquiera, con una hipótesis poco restrictiva sobre uno de ellos.

7.2. Separación en espacios vectoriales

Para comprender mejor la hipótesis que nos va a permitir obtener un teorema de separación de conjuntos convexos, introducimos el siguiente concepto. Se dice que un subconjunto U de un espacio vectorial X es **absorbente** cuando para cada vector $x \in X$ existe un número real positivo ρ tal que $x \in \rho U$, es decir, cuando $\mathbb{R}^+ U = X$. Es claro que entonces $0 \in U$ y además U debe contener un punto en cada dirección del espacio, podemos decir que 0 está "rodeado" por puntos de U. Si U es un conjunto convexo y absorbente, para cada $x \in X$ tenemos un $\rho > 0$ tal que $x/\rho \in U$, con lo que el segmento de extremos 0 y x/ρ estará contenido en U, luego U contiene un segmento no trivial en todas las direcciones del espacio X, si bien la longitud de dicho segmento depende de la dirección. Esto nos lleva a pensar que 0 es una especie de "punto interior" de U.

Por ejemplo, cualquier entorno de cero en un espacio normado es absorbente, pero es fácil dar un ejemplo de conjunto absorbente en $\mathbb{R}^2$ que no es entorno de cero. Podemos pensar que el hecho de que un subconjunto convexo U de un espacio vectorial X sea absorbente significa que 0 es un punto interior a U en un sentido algebraico bastante débil. Naturalmente la misma idea se aplica salvo traslación a cualquier punto del espacio: si A es un conjunto convexo y $a_0 \in A$, el hecho de que $A - a_0$ sea absorbente significa que a_0 es un punto interior de A en el mismo sentido algebraico. Podemos ya enunciar el principal resultado de este tema, que es equivalente a la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach.

Teorema (Separación de convexos en espacios vectoriales). *Sea X un espacio vectorial y A, B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de X. Supongamos que existe un punto $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces existe un funcional lineal no nulo f en X que separa A y B, es decir,*

$$\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B).$$

Demostración. Aclaremos, en primer lugar, que basta considerar el caso real, en el caso complejo se usa el espacio real subyacente como ya hemos comentado.

Empezamos con una observación sencilla: separar A y B es lo mismo que separar $A - B$ y $\{0\}$, siendo claro además que $A - B$ es convexo y que $0 \notin A - B$, ya que $A \cap B = \emptyset$. Así que separar dos conjuntos convexos es lo mismo que separar un conjunto convexo de un punto. En nuestro caso hacemos además una traslación del problema. Concretamente, junto con el punto $a_0 \in A$ que por hipótesis hace que $A - a_0$ sea absorbente, fijamos un $b_0 \in B$ arbitrario y tomamos $U = (A - a_0) - (B - b_0)$. Es claro que U es un subconjunto convexo de X y también es absorbente, ya que $A - a_0 \subseteq U$. Escribiendo $x_0 = b_0 - a_0$, la condición $A \cap B = \emptyset$ nos asegura que $x_0 \notin U$ y a poco que se piense, nuestro problema es separar U del punto x_0.

Para entender mejor el razonamiento que sigue, pensemos en un caso conocido. Imaginemos que U fuese la bola unidad abierta de un espacio normado X. Entonces sabemos que existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\| \geqslant 1$, con lo que es evidente que f separa U del punto x_0. La existencia de f se obtuvo de la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach usando la norma del espacio. La clave para resolver nuestro caso mucho más general consiste en darse cuenta de que la norma del espacio X está determinada por la bola unidad U mediante la siguiente igualdad de comprobación evidente: $\|x\| = \text{ínf}\{\rho > 0 : x \in \rho U\}$ para todo $x \in X$. El segundo miembro de esta igualdad tiene sentido en cualquier espacio vectorial X tan pronto como el conjunto U sea absorbente y define una función de X en $\mathbb{R}$ que en general no será ya una norma en X, pero tendrá las propiedades que necesitamos para aplicar la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach.

Volvamos pues a nuestra demostración. Usando que U es absorbente definimos una función $\nu : X \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\nu(x) = \text{ínf}\{\rho > 0 : x \in \rho U\} \qquad (x \in X).$$

Es evidente que $\nu(x) \leqslant 1$ para todo $x \in U$. Recordando que $x_0 \notin U$ deducimos que $\nu(x_0) \geqslant 1$, ya que si fuese $\nu(x_0) < 1$ tendríamos $x_0 \in \rho U$ para algún ρ con $0 < \rho < 1$, y usando que U es convexo con $0 \in U$ obtendríamos $x_0 \in \rho U \subseteq \rho U + (1-\rho)U = U$.

Vamos a comprobar que ν verifica las condiciones que nos permiten usarla en la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach. La igualdad

$$\nu(rx) = r\nu(x) \quad (r \in \mathbb{R}^+, x \in X)$$

se deduce claramente de la definición de ν. La desigualdad triangular se deduce de la convexidad de U. En efecto, dados $x, y \in X$, tomamos $\rho, \delta > 0$ tales que $x \in \rho U$, $y \in \delta U$, y obtenemos:

$$x + y \in \rho U + \delta U = (\rho+\delta)\left[\frac{\rho}{\rho+\delta}U + \frac{\delta}{\rho+\delta}U\right] = (\rho+\delta)U,$$

donde, para la última igualdad hemos usado que U es convexo. Deducimos que $\nu(x+y) \leqslant \rho+\delta$ y la arbitrariedad de ρ y δ nos permite tomar ínfimos para deducir que

$$\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y),$$

para cualesquiera $x, y \in X$, como se quería.

A partir de aquí todo es conocido, consideramos el subespacio $\mathbb{R}x_0$ de X y el funcional lineal g definido en dicho subespacio por $g(\lambda x_0) = \lambda\nu(x_0)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Observamos que g está dominado por ν, ya que para $\lambda > 0$ tenemos $g(\lambda x_0) = \nu(\lambda x_0)$, mientras que para $\lambda \leqslant 0$ será $g(\lambda x_0) \leqslant 0 \leqslant \nu(\lambda x_0)$. Aplicando la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach tenemos un funcional lineal f en X que extiende a g y sigue dominado por ν.

Vamos a comprobar que f es el funcional que buscamos. En efecto, por una parte tenemos $f(x_0) = \nu(x_0) \geqslant 1$, en particular $f \neq 0$, mientras que para cualquier $x \in U$ será $f(x) \leqslant \nu(x) \leqslant 1$. Por tanto, f separa el conjunto U del punto x_0. Finalmente, para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, usando que $a - b + x_0 = (a - a_0) - (b - b_0) \in U$ tenemos $f(a) - f(b) + f(x_0) \leqslant 1 \leqslant f(x_0)$, de donde $f(a) \leqslant f(b)$ y f separa los conjuntos A y B, como queríamos demostrar. ■

7.3. Equivalencia entre las versiones analítica y geométrica

Ha quedado claro que el teorema de separación recién demostrado es consecuencia directa de la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach. Recíprocamente, dicha versión analítica puede deducirse sin dificultad del teorema de separación. De hecho el teorema de separación permite obtener una versión ligeramente fortalecida de la versión analítica:

Teorema (Nueva versión analítica del Teorema de Hahn-Banach). *Sea X un espacio vectorial y $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea M un subespacio de X y g un funcional lineal en M verificando que $\operatorname{Re} g(m) \leqslant \varphi(m)$ para todo $m \in M$. Entonces existe un funcional lineal f en X que extiende a g y sigue dominado por φ, es decir, $f(m) = g(m)$ para todo $m \in M$ y $\operatorname{Re} f(x) \leqslant \varphi(x)$ para todo $x \in X$.*

Indicamos cómo puede deducirse directamente este enunciado del teorema de separación, sin entrar en el detalle de la demostración. Una vez reducida la demostración al caso real, como siempre viene ocurriendo, se considera el espacio vectorial producto $X \times \mathbb{R}$, en el que se aplica el teorema de separación a los siguientes subconjuntos:

$$A = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : \varphi(x) < t\} \; ; \quad B = \{(m, g(m)) : m \in M\}.$$

No es difícil comprobar que se cumplen todos los requisitos del teorema de separación y, a partir del funcional lineal en $X \times \mathbb{R}$ que separa A y B, se obtiene también sin dificultad el funcional lineal f en X que se busca.

En resumen, queda de manifiesto la equivalencia entre versiones analíticas del Teorema de Hahn-Banach (teoremas de extensión) y versiones geométricas (teoremas de separación).

7.4. Separación en espacios normados

Vamos ahora a obtener consecuencias y aplicaciones importantes del teorema general de separación de conjuntos convexos, empezando por considerar el caso más natural en el que disponemos de una norma en nuestro espacio vectorial X. Si A es un subconjunto de X y a_0 es un punto interior de A, entonces $A - a_0$ es absorbente por ser entorno de cero. Así pues, la hipótesis del teorema de separación queda asegurada suponiendo que uno de los conjuntos convexos que pretendemos separar tiene interior no vacío. Ya se comentó que esta hipótesis es un poco más restrictiva de lo necesario, pues un conjunto absorbente no tiene por qué ser entorno de cero, pero a cambio de fortalecer ligeramente esta hipótesis obtenemos importantes mejoras en las conclusiones. Denotamos por $\operatorname{int}(A)$ al interior del conjunto A.

Corolario (Separación de convexos en espacios normados). *Sea X un espacio normado, A y B subconjuntos convexos de X, y supongamos que $B \neq \emptyset$, $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ y $\operatorname{int}(A) \cap B = \emptyset$. Entonces existen $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \, \forall b \in B$$

De hecho se tiene

$$\operatorname{Re} f(a) < \gamma \quad \forall a \in \operatorname{int} A.$$

Comparemos este enunciado con el teorema general de separación. Teniendo una norma en X, lo cual no supone restricción alguna, a cambio de fortalecer un poco la hipótesis sobre A exigiendo que $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$, debilitamos la hipótesis de que A y B sean disjuntos, exigiendo solamente $\operatorname{int}(A) \cap B = \emptyset$. Además, conseguimos separar A y B mediante un funcional lineal *continuo,* e incluso separamos "estrictamente" $\operatorname{int}(A)$ y B, ya que los conjuntos $f(\operatorname{int}(A))$ y $f(B)$ son disjuntos. La demostración de este corolario se reduce a aplicar el teorema general de separación, junto con algunas observaciones bastante elementales sobre subconjuntos convexos de un espacio normado, que tienen interés en sí mismas. Como siempre, basta probar el caso real.

En primer lugar, es muy fácil comprobar que, *en cualquier espacio normado, el interior de un conjunto convexo también es convexo.* Esta observación nos permite aplicar el teorema de separación a los conjuntos (convexos, no vacíos, disjuntos) $\operatorname{int}(A)$ y B. Obviamente, cualquier punto $a_0 \in \operatorname{int}(A)$ verifica que $\operatorname{int}(A) - a_0$ es absorbente. Obtenemos un funcional lineal no nulo f en X que separa dichos conjuntos y tenemos pues un $\gamma \in \mathbb{R}$ que verifica

$$f(a) \leqslant \gamma \leqslant f(b) \quad \forall a \in \operatorname{int}(A),\ \forall b \in B$$

Queremos que la primera desigualdad sea siempre estricta, pero esto es consecuencia de algo conocido: *en cualquier espacio normado, un funcional lineal no nulo siempre es una aplicación abierta*. Por tanto, $f(\operatorname{int}(A))$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ que no puede tener máximo, luego se deberá tener $f(a) < \gamma$ para todo $a \in \operatorname{int}(A)$.

Podemos ahora comprobar sin dificultad que f es continuo. El hiperplano de ecuación $f(x) = \gamma$ no es denso en X, ya que tiene intersección vacía con el conjunto abierto no vacío $\operatorname{int}(A)$. Salvo una traslación, deducimos que $\ker f$ no es denso en X, luego es cerrado y f es continuo.

Queda probar que f separa también los conjuntos A y B, pues hasta ahora sólo sabemos que separa $\operatorname{int}(A)$ y B. La desigualdad $f(a) < \gamma$, que sabemos es válida para todo $a \in \operatorname{int}(A)$, junto con la continuidad de f, implica evidentemente que $f(x) \leqslant \gamma$ para todo $x \in \overline{\operatorname{int}(A)}$. La demostración se concluye viendo que $A \subseteq \overline{\operatorname{int}(A)}$, y esta es la última observación elemental que necesitamos: *en cualquier espacio normado, un conjunto convexo con interior no vacío está contenido en el cierre de su interior.*

7.5. Funcionales y puntos de soporte

Vamos a considerar un caso particular del último corolario cuya interpretación geométrica es especialmente interesante. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío. Dado un punto x_0 en la frontera de A, podemos aplicar el corolario anterior tomando $B = \{x_0\}$ y obtenemos un funcional lineal continuo f en X que verifica:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall a \in A.$$

La interpretación geométrica de esta desigualdad es muy clara: el hiperplano (afín real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} f(x_0)$ pasa por el punto x_0 y deja el conjunto A a un lado. Es acorde con la intuición decir que dicho hiperplano "soporta" al conjunto A en el punto x_0. Consecuentemente decimos que f es un **funcional de soporte** del conjunto A y también que x_0 es un **punto de soporte** de A. Con esta nomenclatura, el resultado obtenido es el siguiente:

Corolario (Abundancia de puntos de soporte). *Si X es un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío, todo punto de la frontera de A es un punto de soporte de A.*

Un caso particular del corolario anterior era ya conocido. Si A es la bola unidad de X (abierta o cerrada da igual) y lógicamente tomamos $x_0 \in X$ con $\|x_0\| = 1$, sabemos hace tiempo que existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1 = f(x_0)$ y es evidente que f es entonces un funcional de soporte de la bola unidad en el punto x_0.

7.6. Separación fuerte

En ciertos casos, la separación entre subconjuntos de un espacio normado X se puede cuantificar. Supongamos que dos subconjuntos convexos no vacíos A y B de X, no sólo son disjuntos, sino que están a distancia positiva, es decir:

$$d(A,B) = \text{ínf}\{\|a-b\| : a \in A,\, b \in B\} = \rho > 0.$$

Si U es la bola abierta unidad de X, podemos separar los conjuntos $A+\rho U$ y B, que claramente son convexos no vacíos disjuntos y el primero de ellos tiene interior no vacío. Obtenemos así un $f \in X^* \setminus \{0\}$ verificando que $\sup \operatorname{Re} f(A+\rho U) \leqslant \text{ínf} \operatorname{Re} f(B)$. Esta desigualdad no se altera si la dividimos por $\|f\|$, así que podemos suponer que $\|f\| = 1$, pero entonces es inmediato que $\operatorname{Re} f(U) =]-1,1[$ con lo que $\sup \operatorname{Re} f(A+\rho U) = \sup \operatorname{Re} f(A) + \rho$. Poniendo $\gamma = \sup \operatorname{Re} f(A)$ hemos demostrado lo siguiente:

Corolario (Separación fuerte en espacios normados). *Sean A y B subconjuntos convexos no vacíos de un espacio normado X y supongamos que $d(A,B) = \rho > 0$. Entonces existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \gamma + \rho \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad (a \in A,\, b \in B).$$

Se dice que el funcional f separa *fuertemente* los conjuntos A y B. Obsérvese que tenemos dos hiperplanos, como siempre reales y afines, los de ecuaciones $\operatorname{Re} f(x) = \gamma$ y $\operatorname{Re} f(x) = \gamma + \rho$, tales que el conjunto A queda a un lado de ambos y B al otro. Además, la distancia entre tales hiperplanos es ρ, la máxima posible.

Recordemos un caso particular del corolario anterior que ya conocíamos: si como conjunto A tomamos un subespacio M del espacio normado X y $B = \{x_0\}$ con $d(x_0, M) > 0$, de la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach obtuvimos la existencia de $f \in M^\circ$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = d(x_0, M)$. El corolario anterior es claramente un resultado mucho más general.

Condiciones naturales para aplicar el corolario anterior se presentan cuando uno de los conjuntos convexos, pongamos A, es compacto, y B es cerrado con $A \cap B = \emptyset$. La función continua $x \mapsto d(x,B)$ alcanza un valor mínimo en el compacto A, luego $d(A,B) > 0$.

7.7. Separación en espacios de dimensión finita

Concluimos este tema probando que en dimensión finita no es necesaria ninguna hipótesis restrictiva para separar conjuntos convexos disjuntos.

Ello se debe a la siguiente observación clave. Si U es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$, con $0 \in U$, y el subespacio engendrado por U es todo $\mathbb{R}^N$, entonces U tiene interior no vacío. En efecto, U contendrá una base $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ y usando la convexidad de U, junto con el hecho de que $0 \in U$, es fácil deducir que U debe contener al conjunto abierto

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k u_k \; : \; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}^+, \; \sum_{k=1}^{N} \lambda_k < 1 \right\}.$$

La condición $0 \in U$ siempre se puede conseguir mediante una traslación y lo que obtenemos es que un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ con interior vacío ha de estar contenido en un subespacio afín propio de $\mathbb{R}^N$, algo que intuitivamente era fácil adivinar. Podemos ya enunciar:

Corolario (Separación de convexos en dimensión finita). *Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de $\mathbb{R}^N$. Entonces existe un funcional lineal en $\mathbb{R}^N$ que separa A y B. Más concretamente, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, y también $\gamma \in \mathbb{R}$, tales que*

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k a_k \leqslant \gamma \leqslant \sum_{k=1}^{N} \alpha_k b_k,$$

para cualesquiera $(a_1, a_2, \ldots, a_N) \in A$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_N) \in B$.

Al igual que para el teorema general de separación, empezamos por reducir el problema a separar un conjunto convexo de un punto que no le pertenezca. Más concretamente, fijamos $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y tomamos $U = (A - a_0) - (B - b_0)$, un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^N$ tal que $0 \in U$, y nuestro problema es separar U del punto $x_0 = b_0 - a_0$ que no pertenece a U por ser A y B disjuntos.

Si U tiene interior no vacío, aplicamos, por ejemplo, el teorema de separación de conjuntos convexos en espacios normados. Si U tiene interior vacío, las observaciones hechas anteriormente nos aseguran que U está contenido en un subespacio propio de R^N, en particular existe un funcional lineal no nulo f en $\mathbb{R}^N$ tal que $U \subseteq \ker f$. Cambiando f por $-f$ tendremos $\operatorname{Re} f(x_0) \geqslant 0$, con lo cual

$$\operatorname{Re} f(u) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall u \in U$$

y deducimos inmediatamente que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \; \forall b \in B.$$

Tema 8

Teorema de Banach-Steinhaus

Tras el Teorema de Hahn-Banach, presentamos en este tema el segundo de los principios fundamentales del Análisis Funcional, llamado *Teorema de Banach-Steinhaus.* Su demostración se deducirá muy fácilmente de un resultado puramente topológico, cuya historia merece un comentario.

En los primeros años del siglo XX solía hacerse con frecuencia en espacios de funciones un tipo de razonamiento que recibía el nombre de *método de condensación de singularidades.* Estos razonamientos se consideran hoy día como precedentes del Teorema de Banach-Steinhaus.

Paralelamente, habían empezado a usarse los llamados *métodos de categoría,* que permitían discernir de forma provechosa entre subconjuntos "grandes" y "pequeños" de un espacio topológico. Estos métodos tienen al parecer su origen en un trabajo de W. Osgood (1897), donde se prueba que la intersección de una sucesión de abiertos densos en $\mathbb{R}$ también es densa en $\mathbb{R}$. Dos años después, R. Baire observa que el mismo resultado es cierto en $\mathbb{R}^N$ y lo aprovecha en su estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas (llamadas *funciones de la primera clase de Baire*). Una caracterización de las propiedades de continuidad que tienen tales funciones se conoce como el *Gran Teorema de Baire* y los métodos de categoría juegan un papel clave en su demostración.

S. Banach observó que el mencionado resultado de Osgood y Baire no sólo es cierto en $\mathbb{R}^N$ sino también, con la misma demostración de Baire, en cualquier espacio métrico completo y en cualquier espacio topológico localmente compacto, dando así forma definitiva a lo que hoy día conocemos como *Teorema de Baire,* o con más propiedad, *Lema de Categoría de Baire.* Al mismo tiempo, Banach observó que usando este lema se podían simplificar y clarificar enormemente los resultados basados en el método de condensación de singularidades, dejando así establecida la utilidad de los métodos de categoría en Análisis Funcional. En particular dio una demostración muy sencilla de un teorema probado previamente por H. Steinhaus, llamado *Teorema de cierre de Steinhaus,* que desde entonces ha quedado como una fácil consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus.

8.1. Lema de Categoría de Baire

Empezamos introduciendo la noción topológica en que se basan los métodos de categoría. Sea E un espacio topológico y $A \subseteq E$. Se dice que A es de **primera categoría** en E cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de E que tienen todos interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en E.

Para que la intuición ayude a entender la definición anterior, pensemos que un cerrado con interior vacío es topológicamente "muy pequeño". Por ejemplo, los subconjuntos finitos de un espacio normado tienen esta propiedad. A partir de esta idea básica, los subconjuntos de un espacio topológico E se han clasificado en dos tipos: los de primera categoría, que podríamos ver como topológicamente "pequeños", y los de segunda categoría, que serían topológicamente "grandes". Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en E es de primera categoría en E, así como que una unión numerable de conjuntos de primera categoría en E es de primera categoría en E.

También conviene precisar que las nociones de categoría son relativas, dependen del espacio ambiente E. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ visto como subconjunto de $\mathbb{C}$ es cerrado con interior vacío, luego es de primera categoría en $\mathbb{C}$, pero veremos enseguida que $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo. En general, si F es un espacio topológico y E es un subconjunto de F en el que consideramos la topología inducida, es fácil ver que todo conjunto de primera categoría en E es también de primera categoría en F, pero el recíproco no es cierto, como acabamos de comentar.

Lema de Categoría de Baire. *Si E es un espacio métrico completo, o un espacio topológico localmente compacto, entonces todo subconjunto abierto no vacío de E es de segunda categoría en E. En particular, E es de segunda categoría en sí mismo.*

Antes de entrar en la demostración, observemos que la tesis del teorema anterior puede reformularse equivalentemente de diversas formas. Decir que todo abierto no vacío es de segunda categoría en E equivale evidentemente a cualquiera de las siguientes afirmaciones:

- *Todo conjunto de primera categoría en E tiene interior vacío.*
- *Si $\{F_n\}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de E tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior no vacío, entonces algún F_n tiene interior no vacío.*
- *Si $\{G_n\}$ es una sucesión de abiertos densos en E, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en E.*

Demostración. Sea E un espacio métrico completo y $\{G_n\}$ una sucesión de abiertos densos en E. Probaremos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en E, es decir, si G es otro abierto no vacío de E, deberemos ver que $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \bigcap G \neq \emptyset$. El caso en que E es un espacio localmente compacto tiene una demostración bastante análoga, que queda como ejercicio.

Puesto que G_1 es un abierto denso en E, $G \cap G_1$ es un abierto no vacío que contendrá una bola cerrada B_1 de radio $\delta > 0$ y podemos tomar $\delta < 1/2$, con lo que el diámetro de B_1 será menor que 1. En suma B_1 es una bola cerrada de radio estrictamente positivo y verifica:

$$B_1 \subseteq G \cap G_1 \; ; \quad \operatorname{diam}(B_1) < 1.$$

La correspondiente bola abierta tendrá intersección no vacía con el abierto denso G_2, luego dicha intersección es un abierto no vacío que contendrá una bola cerrada B_2 de radio estrictamente positivo, que podemos tomar menor que $1/4$, con lo que B_2 tendrá diámetro menor que $1/2$. Anotamos que B_2 es una bola cerrada de radio estrictamente positivo verificando:

$$B_2 \subseteq B_1 \cap G_2 \; ; \quad \operatorname{diam}(B_2) < \frac{1}{2}.$$

Hemos arrancado obviamente un proceso de inducción y es claro cómo se construye la bola B_{n+1} a partir de B_n. Así pues, podemos construir por inducción una sucesión $\{B_n\}$ de bolas cerradas en E que verifica:

$$B_1 \subset G \cap G_1 \; ; \quad B_{n+1} \subseteq B_n \cap G_{n+1} \; ; \quad \operatorname{diam}(B_n) < \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Todo está preparado para usar la complitud de E. Puesto que $\{B_n\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de E con diámetro tendiendo a cero, su intersección es un punto: $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x_0\}$. Por ser $x_0 \in B_1$ tenemos $x_0 \in G$ y $x_0 \in G_1$. Además, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x \in B_{n+1} \subseteq G_{n+1}$, luego $x_0 \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \bigcap G$ y hemos probado que este último conjunto no es vacío, como se quería. ■

Resaltemos que la tesis del lema anterior es puramente topológica, nos da una condición necesaria para que la topología de un espacio sea la generada por una distancia completa. Por ejemplo, no existe una distancia completa en $\mathbb{Q}$ que genere su topología usual (la inducida por $\mathbb{R}$), ya que evidentemente $\mathbb{Q}$ es de primera categoría en sí mismo. Por otra parte, vemos también, como ya habíamos anunciado, que $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo, luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de segunda categoría en $\mathbb{R}$ y en particular $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable. En la misma línea obtenemos la siguiente consecuencia para espacios de Banach:

Corolario. *La dimensión de un espacio de Banach es finita o no numerable.*

En efecto, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita y $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto infinito y numerable de vectores linealmente independientes en X, bastará probar que U no puede ser una base de X, es decir que $\operatorname{Lin}(U) \neq X$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n = \operatorname{Lin}(\{u_1, u_2, \ldots, u_n\})$ y recordemos que, como consecuencia del Teorema de Hausdorff, F_n es cerrado en X. Además, por ser un subespacio propio de X, F_n tiene interior vacío, luego $\operatorname{Lin}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es un conjunto de primera categoría en X y el Lema de Categoría de Baire nos asegura que $\operatorname{Lin}(U) \neq X$, como queríamos.

Comentemos, sin dar la demostración, un aplicación clásica y muy vistosa del Lema de Categoría de Baire. A lo largo del siglo XIX aparecieron diversos ejemplos (el primero y más famoso se debe a Weierstrass) de funciones continuas en un intervalo compacto, digamos $[0,1]$, que no son derivables en ningún punto. Pues bien, considerando el espacio de Banach $C[0,1]$, no es difícil comprobar que el subconjunto formado por las funciones que admiten al menos una derivada lateral en algún punto, es de primera categoría en $C[0,1]$, luego el Lema de Categoría de Baire nos asegura que *el conjunto de las funciones continuas en* $[0,1]$ *que no son derivables en ningún punto de* $[0,1]$ *es de segunda categoría en* $C[0,1]$. Podríamos decir que la "gran mayoría" de las funciones continuas en $[0,1]$ no son derivables en ningún punto. Obsérvese la fuerza del lema de Baire: nos asegura la abundancia de un cierto tipo de funciones, a pesar de que no es fácil dar un sólo ejemplo concreto de una función de ese tipo.

8.2. Teorema de Banach-Steinhaus

Este resultado se conoce también a veces como *Principio de Acotación Uniforme*, porque permite pasar de una acotación de tipo "puntual" a una acotación de tipo "uniforme" para una familia de operadores lineales y continuos. Expliquemos con precisión estos dos tipos de acotación:

Sean X e Y espacios normados y $\Gamma = \{T_i : i \in I\} \subseteq L(X,Y)$ una familia de operadores lineales y continuos de X en Y. Es natural decir que la familia Γ está **acotada en un punto** $x \in X$ cuando $\{T_i(x) : i \in I\}$ es un subconjunto acotado de Y, es decir, cuando

$$\sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\} < \infty$$

Lógicamente, decimos que la familia Γ está **puntualmente acotada** en un conjunto $G \subseteq X$, cuando está acotada en cada punto $x \in G$. En tal caso, para cada $x \in G$ podemos encontrar una constante $M_x > 0$ tal que $\|T_i x\| \leqslant M_x$ para todo $i \in I$, pero en principio la constante M_x depende del punto $x \in G$ considerado. Hablamos de acotación uniforme cuando podemos evitar esa dependencia, es decir, cuando la misma constante vale para todos los puntos del conjunto. Así pues, la familia Γ está **uniformemente acotada** en un conjunto $G \subseteq X$ cuando existe $M > 0$ tal que $\|T_i(x)\| \leqslant M$ para todo $x \in G$ y todo $i \in I$, es decir,

$$\sup\{\|T_i(x)\| : x \in G,\, i \in I\} < \infty$$

Obsérvese que, salvo en el caso trivial $\Gamma = \{0\}$, la condición anterior exige que el conjunto G esté acotado, es decir, contenido en una bola que, salvo una homotecia, puede ser la bola unidad. Por tanto, el caso en que $G = B$ es la bola unidad de X (abierta o cerrada, da igual) tiene especial interés. En tal caso, recordando la definición de la norma de operadores, tenemos

$$\sup\{\|T_i(x)\| : x \in B,\, i \in I\} = \sup\{\|T_i\| : i \in I\}$$

Por tanto, la familia de operadores Γ está uniformemente acotada en la bola unidad de X cuando Γ es un subconjunto acotado del espacio normado $L(X,Y)$: $\sup\{\|T_i\| : i \in I\} < \infty$. En tal caso, es claro que la familia Γ está uniformemente acotada en cada subconjunto acotado de X y, en particular, está puntualmente acotada en todo el espacio X. Pues bien, cuando el espacio X sea completo va a ser cierta la implicación recíproca, podremos pasar de la acotación puntual a la uniforme.

Teorema de Banach-Steinhaus. *Sea* $\Gamma = \{T_i : i \in I\} \subseteq L(X,Y)$ *una familia de operadores lineales continuos de un espacio de Banach* X *en un espacio normado* Y. *Consideremos el conjunto de puntos de* X *en los que* Γ *está puntualmente acotada, es decir:*

$$A = \big\{x \in X \,:\, \sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\} < \infty\big\}.$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) A *es de segunda categoría en* X

(ii) $A = X$, *es decir, la familia* Γ *está puntualmente acotada en todo el espacio* X:

$$\sup\{\|T_i x\| \,:\, i \in I\} < \infty \quad \forall x \in X$$

(iii) Γ *está uniformemente acotada en la bola unidad de* X:

$$\sup\{\|T_i\| \,:\, i \in I\} < \infty$$

Demostración. Ya hemos comentado que $(iii) \Rightarrow (ii)$. El Lema de categoría de Baire nos asegura que X es de segunda categoría en sí mismo, luego $(ii) \Rightarrow (i)$. Basta por tanto probar que $(i) \Rightarrow (iii)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto

$$F_n = \big\{x \in X : \sup\{\|T_i(x)\| : i \in I\} \leqslant n\big\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in X : \|T_i(x)\| \leqslant n\},$$

que es un subconjunto cerrado de X, y tenemos claramente que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Deducimos de la hipótesis sobre A que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que F_m tiene interior no vacío, luego Γ está uniformemente acotada en un abierto no vacío de X. Pero ahora entra en juego la linealidad de nuestros operadores, para pasar de dicho abierto a la bola unidad. En efecto, F_m contendrá una bola abierta, digamos de centro $x_0 \in X$ y radio $r > 0$, con lo cual tenemos:

$$x \in X,\ \|x - x_0\| < r \ \Rightarrow \|T_i(x)\| \leqslant m \quad \forall\, i \in I.$$

Pero entonces, fijado $u \in X$ con $\|u\| < 1$ y tomando $x = x_0 + r\,u$ tenemos, para todo $i \in I$:

$$\|T_i(u)\| = \left\| T_i\left(\frac{x - x_0}{r}\right)\right\| \leqslant \frac{1}{r}(\|T_i(x)\| + \|T_i(x_0)\|) \leqslant \frac{2m}{r}.$$

Puesto que la constante $M = 2m/r$ es independiente del índice $i \in I$, hemos probado que $\sup\{\|T_i\| : i \in I\} \leqslant M < \infty$ como se quería. ■

Naturalmente, la parte más útil del teorema anterior es la afirmación $(ii) \Rightarrow (iii)$ que permite, como habíamos anunciado, pasar de la acotación puntual a la uniforme. La afirmación (i) tiene interés cuando usamos el teorema por la negativa: si la familia Γ no está acotada en norma, la equivalencia entre (ii) y (iii) sólo nos da la *existencia* de algún punto de X en el que Γ no está acotada, mientras que la equivalencia entre (i) y (iii) nos asegura la *abundancia* de tales puntos. Enseguida veremos un ejemplo concreto de esta situación.

8.3. Series de Fourier de funciones continuas

Resaltemos que el Teorema de Banach-Steinhaus tiene una demostración muy sencilla: se deduce fácilmente del Lema de Categoría de Baire, cuya prueba tampoco es difícil. Por tanto, cuando usamos el teorema en algún ejemplo concreto, hacemos un razonamiento muy sencillo y elegante. Vamos a presentar aquí algunas aplicaciones que históricamente tuvieron repercusión y son responsables de la notoriedad que el teorema adquirió rápidamente. La primera da información sobre las series de Fourier de funciones continuas y, para exponerla con claridad, conviene precisar algunas nociones que deben ser conocidas.

En realidad trabajaremos con funciones definidas en la circunferencia: $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, de hecho con el espacio de Banach $C(\mathbb{T})$ de las funciones continuas de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{C}$. Sin embargo, en Análisis de Fourier es más cómodo ver tales funciones, y otras en espacios más generales, como funciones de variable real. Concretamente, dada una función $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, pensamos en la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por $f(t) = g(e^{it})$ para todo $t \in \mathbb{R}$, que es claramente una función periódica de periodo 2π. La correspondencia entre las funciones g y f es biunívoca, así que podemos identificarlas y no hacer distinción entre funciones de $\mathbb{T}$ en $\mathbb{C}$ y funciones 2π-periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, sin que ello dé lugar a confusión. Así pues, podemos ver $C(\mathbb{T})$ como el espacio de Banach de las funciones continuas y 2π-periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. La norma de una tal función f viene dada por:

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} = \max\{|f(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}.$$

En la misma línea, se denota por $L_1(\mathbb{T})$ al espacio de Banach de todas las funciones medibles 2π-periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ tales que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt < \infty$, identificando funciones que coincidan c.p.d. Su norma viene dada por:

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt \qquad (f \in L_1(\mathbb{T})).$$

Para encontrar este espacio entre los ejemplos de espacios de Banach presentados en su momento, basta observar que $L_1(\mathbb{T})$ es isométricamente isomorfo al espacio $L_1[-\pi, \pi]$, pero tiene interés verlo como espacio de funciones definidas en la circunferencia.

Pues bien, para $f \in L_1(\mathbb{T})$, los **coeficientes de Fourier** de f vienen dados por:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\,dt \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

y la serie trigonométrica $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{int}$ es la **serie de Fourier** de la función f, cuya sucesión de sumas parciales viene dada por:

$$S_n(f;t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

El estudio de la convergencia de series de Fourier consiste obviamente en dilucidar bajo qué condiciones y en qué sentido la serie de Fourier de una función f converge a f. Aquí sólo vamos a considerar la posible convergencia puntual para una función continua $f \in C(\mathbb{T})$. Du Bois-Reymond dio un ejemplo en 1876 de una función continua cuya serie de Fourier no converge puntualmente, pero no es fácil construir este tipo de ejemplos. El Teorema de Banach-Steinhaus permite probar con facilidad que tales ejemplos abundan, sin dar explícitamente ninguno.

Asociemos a cada función $f \in C(\mathbb{T})$ el valor en el origen de una suma parcial de la serie de Fourier, más concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el funcional lineal φ_n definido en $C(\mathbb{T})$ por:

$$\begin{aligned}\varphi_n(f) = S_n(f;0) &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt \qquad (f \in C(\mathbb{T}))\end{aligned}$$

donde claramente $D_n \in C(\mathbb{T}) \subseteq L_1(\mathbb{T})$. La sucesión de funciones $\{D_n\}$ se conoce como “núcleo de Dirichlet” y naturalmente la posible convergencia de una serie de Fourier guarda estrecha relación con las propiedades de dicha sucesión. Para $0 \neq t \in [-\pi, \pi]$, tenemos claramente:

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}},$$

mientras que $D_n(0) = 2n + 1$. La desigualdad

$$\begin{aligned}|\varphi_n(f)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)\, D_n(t)|\, dt \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt\right) \|f\|_\infty = \|D_n\|_1\, \|f\|_\infty \qquad (f \in C(\mathbb{T})),\end{aligned}$$

nos dice que $\varphi_n \in C(\mathbb{T})^*$ con $\|\varphi_n\| \leqslant \|D_n\|_1$. Como ya se comentó en un tema anterior, cuando vimos que $L_1[0,1]$ se identifica con un subespacio de $C[0,1]^*$, no es difícil comprobar que la estimación que acabamos de hacer es óptima, es decir, que se tiene de hecho: $\|\varphi_n\| = \|D_n\|_1$. La expresión del núcleo de Dirichlet anteriormente obtenida permite hacer una estimación de su norma en $L_1(\mathbb{T})$, para concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = +\infty$.

En resumen, tenemos una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funcionales lineales continuos en el espacio de Banach $C(\mathbb{T})$ que no está uniformemente acotada en la bola unidad. Aplicando el Teorema de Banach-Steinhaus, obtenemos que la sucesión $\{\varphi_n\}$ no puede estar puntualmente acotada, es decir, existen funciones $f \in C(\mathbb{T})$ tales la sucesión $\{\varphi_n(f)\} = \{S_n(f;0)\}$ no está acotada, en particular la serie de Fourier de f no converge en el origen. De hecho, usando la primera de las afirmaciones equivalentes del teorema obtenemos la abundancia de tales funciones:

Corolario. *Las funciones cuya serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en el origen forman un conjunto de primera categoría en $C(\mathbb{T})$.*

Así pues, podemos decir que la convergencia puntual de las series de Fourier es “atípica”: la serie de Fourier de la gran mayoría de funciones continuas no converge puntualmente.

8.4. Nuevas consecuencias

En el apartado anterior sólo hemos usado el Teorema de Banach-Steinhaus para funcionales. Destaquemos en este caso particular la parte que más nos interesa del teorema, de la que vamos a obtener aplicaciones interesantes.

Corolario (Teorema de Banach-Steinhaus para funcionales). *Sea X un espacio de Banach y $\Gamma = \{f_i : i \in I\} \subseteq X^*$ una familia de funcionales lineales continuos en X. Supongamos que Γ está puntualmente acotada:* $\sup\{|f_i(x)| : i \in I\} < \infty$ *para todo $x \in X$. Entonces Γ es un subconjunto acotado de X^*:* $\sup\{\|f_i\| : i \in I\} < \infty$.

Recordemos que, mediante la inyección canónica J de un espacio normado X en su bidual, los vectores de X se convierten en funcionales lineales continuos en X^*, con la ventaja de que X^* siempre es un espacio de Banach. Dado un conjunto de vectores $A \subseteq X$, decir que la familia de funcionales $J(A)$ está acotada en un punto $f \in X^*$ equivale a decir que el conjunto $f(A)$ está acotado. Si esto ocurre para todo $f \in X^*$, el corolario anterior nos dice que $J(A)$ es un subconjunto acotado de X^{**}. Pero J es isométrica, así que lo que obtenemos es que A es un subconjunto acotado de X. Así pues, el dual de un espacio normado nos permite dilucidar si un subconjunto del espacio está acotado o no:

Corolario. *Un subconjunto A de un espacio normado X está acotado si, y sólo si, para cada $f \in X^*$, el conjunto de escalares $f(A)$ está acotado .*

Volviendo al ambiente general de operadores, es claro que una sucesión puntualmente convergente está puntualmente acotada. Aplicando el teorema de Banach-Steinhaus obtenemos fácilmente lo siguiente:

Corolario (Teorema de cierre de Steinhaus). *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y que converge puntualmente en X, es decir, tal que la sucesión $\{T_n(x)\}$ converge en Y para cada $x \in X$. Entonces, definiendo*

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \qquad (x \in X),$$

se obtiene un operador lineal y continuo: $T \in L(X,Y)$.

Demostración. La linealidad de T es evidente y, como habíamos comentado, la familia de operadores $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ está puntualmente acotada, así que el Teorema de Banach-Steinhaus nos dice que $\sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\} = M < \infty$. Fijado $x \in X$, la desigualdad

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n\|\,\|x\| \leqslant M\,\|x\|,$$

válida para todo $n \in \mathbb{N}$, implica claramente que $\|T(x)\| \leqslant M\,\|x\|$, y en vista de la arbitrariedad de x, hemos probado que $T \in L(X,Y)$, con $\|T\| \leqslant M$. ■

En relación con este último resultado, conviene resaltar que, aunque $T \in L(X,Y)$ y $\{T_n\}$ converge puntualmente a T en todo el espacio X, en general no podemos asegurar que la sucesión $\{T_n\}$ converja a T en el espacio $L(X,Y)$, más concretamente, no tiene por qué ocurrir que $\{\|T_n - T\|\} \to 0$.

Por ejemplo, tomando $X = c_0$ e $Y = \mathbb{K}$, la sucesión $\{f_n\}$ de funcionales lineales continuos en c_0 definida por $f_n(x) = x(n)$ para cualesquiera $x \in c_0$ y $n \in \mathbb{N}$, converge puntualmente (a cero) en c_0 pero $\|f_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8.5. Aplicaciones en teoría de sumabilidad

Concluimos este tema con otro bloque de aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus que permiten obtener fácilmente diversos criterios de convergencia de sucesiones y series. Empezamos recordando la descripción del dual de c_0. Cada sucesión $y \in l_1$ se identifica con el funcional $Sy \in c_0^*$ dado por

$$[Sy](x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \quad (x \in c_0).$$

Sabemos que, para todo $x \in c_0$, la serie anterior es absolutamente convergente y que S acaba siendo un isomorfismo isométrico de l_1 sobre c_0^*. Sin embargo, dada una sucesión de escalares $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cabe preguntarse si la convergencia (absoluta o no) de la serie $\sum\limits_{k\geqslant 1} x(n)\,y(n)$ para todo $x \in c_0$ implica ya que $y \in l_1$, lo que nos daría un criterio de convergencia absoluta para series de escalares. La respuesta es afirmativa, e incluso podemos afirmar algo más:

Corolario. *Para $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *La serie $\sum_{n\geqslant 1} y(n)$ es absolutamente convergente.*
(ii) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,y(n)$ es absolutamente convergente.*
(iii) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,y(n)$ es convergente.*
(iv) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,y(n)$ tiene sumas parciales acotadas.*

Demostración. Basta evidentemente probar que *(iv)* $\Rightarrow$ *(i)*. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el funcional $f_n \in c_0^*$ definido por

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k)\,y(k) \qquad (x \in c_0),$$

obteniendo una sucesión $\{f_n\}$ de funcionales lineales continuos en el espacio de Banach c_0 que, por hipótesis, está puntualmente acotada en c_0. El Teorema de Banach-Steinhaus nos dice entonces que la sucesión $\{\|f_n\|\}$ está acotada, pero es claro que $\|f_n\| = \sum_{k=1}^{n} |y(k)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $y \in l_1$ como se quería. ■

Enunciados análogos al anterior, con idéntica demostración, permiten discutir la posibilidad de que una sucesión $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ pertenezca a alguno de los espacios l_p con $1 < p < \infty$. El papel de c_0 lo jugará entonces l_{p^*}. Por ejemplo, $y \in l_2$ si, y sólo si, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,y(n)$ tiene sumas parciales acotadas para cada $x \in l_2$.

Dando un paso más en este tipo de resultados, vamos a considerar algunos *métodos de sumabilidad.* Como motivación, consideramos el criterio de la media aritmética: si una sucesión $\{x_n\}$ de números reales o complejos converge, entonces la sucesión de las medias aritméticas $\left\{\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right\}$ converge al mismo límite. Es bien sabido que el recíproco no es cierto, de forma que hacer la media aritmética de los primeros términos de una sucesión puede verse como un método que facilita la convergencia, un ejemplo muy sencillo de método de sumabilidad. Esta terminología se justifica por el hecho de que la sucesión de partida $\{x_n\}$ puede y suele ser a su vez la sucesión de sumas parciales de una serie, con lo que el método de la media aritmética proporciona una especie de “suma” de la serie, que coincide con la auténtica suma cuando la serie converge, pero que puede existir y ser útil en condiciones más generales.

El ejemplo paradigmático de esta situación se presenta con las series de Fourier. Hemos visto que la serie de Fourier de una función continua $f \in C(\mathbb{T})$ rara vez converge siquiera puntualmente a la función f. Sin embargo, vamos a considerar la sucesión de medias aritméticas de las sumas parciales de la serie de Fourier. Concretamente, para cada $N \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\sigma_N(f;t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f;t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\, e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Se dice que $\{\sigma_N\}$ es la sucesión de **sumas de Cèsaro** de la serie de Fourier de f. El criterio de la media aritmética nos proporciona, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, la siguiente implicación:

$$\{S_n(f;t)\} \to f(t) \quad \Rightarrow \quad \{\sigma_N(f;t)\} \to f(t),$$

pero el recíproco está muy lejos de ser cierto. Concretamente, el resultado básico en el estudio de la *sumabilidad* de series de Fourier es el llamado **Teorema de Féjer:** *Para $f \in C(\mathbb{T})$, la sucesión de sumas de Cèsaro de la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$.*

Pues bien, nos proponemos generalizar el criterio de la media aritmética, sustituyendo dicha media por una combinación lineal arbitraria de los términos de la sucesión de partida, admitiendo incluso combinaciones lineales “infinitas”. Para ello consideramos una matriz infinita de escalares $A = \{a_{nk} : n,k \in \mathbb{N}\}$. En puridad se trata de una aplicación de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, pero es más intuitivo usar notación matricial. Dada una sucesión de escalares $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, podemos pensar en multiplicar formalmente la matriz A por el vector columna (infinito) x es decir, considerar la sucesión Ax definida por:

$$[Ax](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x(k) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

suponiendo, claro está, que las series del segundo miembro convergen, por lo que definimos:

$$D(A) = \Big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k\geqslant 1} a_{nk}\, x(k) \text{ converge para todo } n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Claramente $D(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que contiene al menos al espacio c_{00} de las sucesiones de soporte finito. Se dice que $D(A)$ es el **dominio** de la matriz A, ya que tenemos un operador lineal en $D(A)$ con valores en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, el operador $x \mapsto Ax$, al que también denotamos por A sin que ello dé lugar a confusión. Cuando este operador conserva el espacio de las sucesiones convergentes, se dice que la matriz A es conservativa. Si además la sucesión transformada Ax tiene el mismo límite que la sucesión de partida $x \in c$, decimos que A es regular. Así pues, una matriz A es **regular** cuando verifica:

$$x \in c \implies x \in D(A),\ Ax \in c,\ \lim_{n\to\infty}[Ax](n) = \lim_{n\to\infty} x(n).$$

Cualquier matriz regular A da lugar a un método admisible de sumabilidad, puesto que cuando una sucesión de partida $x \in D(A)$ converge, Ax converge al mismo límite, pero puede perfectamente ocurrir que Ax converja sin que lo haga x. Como ejemplo, para conseguir que Ax sea la sucesión de las medias aritméticas de los términos de la sucesión x, basta tomar $a_{nk} = 1/n$ si $k \leqslant n$ y $a_{nk} = 0$ si $k > n$. Es claro que en este caso $D(A) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y el criterio de la media aritmética afirma precisamente que dicha matriz A es regular.

El esquema general que hemos introducido admite obviamente muchas más posibilidades y es natural buscar una caracterización cómoda de las matrices regulares. La siguiente es una respuesta satisfactoria a ese problema:

Teorema (Silverman-Toeplitz). *Una matriz infinita de escalares $A = \{a_{nk} : n,k \in \mathbb{N}\}$ es regular si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:*

(1) $\sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$

(2) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

(3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \, = \, 1$

No vamos a presentar la demostración del teorema anterior. Mencionemos solamente que el paso más importante consiste en probar que una matriz regular ha de verificar la condición (1), y este es el punto en el que se aplica el Teorema de Banach-Steinhaus. El resto de la demostración es bastante rutinaria.

Tema 9

Teoremas de la Aplicación Abierta y de la Gráfica Cerrada

El título de este tema alude a dos teoremas que son en realidad versiones equivalentes de un mismo principio, el tercero de los principios fundamentales del Análisis Funcional. De hecho veremos hasta cuatro formulaciones equivalentes de dicho principio. Empezaremos estudiando los operadores lineales que pueden considerarse como morfismos en la categoría de espacios normados, a los que llamaremos *homomorfismos topológicos,* en consonancia con la noción de isomorfismo topológico que ya hemos manejado anteriormente. Conseguiremos una cómoda caracterización de los homomorfismos topológicos entre espacios de Banach *(Teorema del Homomorfismo de Banach)*, que tiene especial interés para operadores sobreyectivos *(Teorema de la Aplicación Abierta)* o biyectivos *(Teorema de los Isomorfismos de Banach)*. El *Teorema de la Gráfica Cerrada*, equivalente a los tres anteriores, nos dará una muy útil caracterización de la continuidad de un operador lineal entre espacios de Banach. El Lema de Categoría de Baire seguirá siendo un instrumento clave en las demostraciones.

9.1. Homomorfismos topológicos

Los operadores lineales son los morfismos en la categoría de espacios vectoriales. Recordemos el primer teorema de isomorfía en esa categoría, o más intuitivamente, la factorización canónica de un operador lineal. Si X e Y son espacios vectoriales y $T : X \to Y$ un operador lineal (un homomorfismo), dicha factorización se resume en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\ker T \arrow[r, "\tilde{T}"] & T(X) \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

La aplicación cociente π es sobreyectiva (un epimorfismo) y la inclusión natural I es inyectiva (un monomorfismo). El operador lineal $\tilde{T}$, bien definido por la igualdad $\tilde{T}(x+\ker T) = T(x)$, que hace el diagrama conmutativo, es biyectivo (un isomorfismo). Así pues, cada homomorfismo T se factoriza como composición de un epimorfismo, un isomorfismo y un monomorfismo, siendo fácil comprobar que esta factorización es única (salvo isomorfismos).

Tratemos de dar contenido topológico a la discusión anterior, suponiendo que X e Y son espacios normados y que $T \in L(X,Y)$ es un operador lineal y continuo. Entonces $\ker T$ es un subespacio cerrado de X, con lo que podemos considerar en $X/\ker T$ la norma cociente y pensar qué condición debe cumplir T para que $\tilde{T}$ sea un isomorfismo topológico, es decir, para que $\tilde{T}$ y $\tilde{T}^{-1}$ sean continuos. La conocida caracterización de la continuidad de aplicaciones que parten de un espacio cociente nos dice que $\tilde{T}$ es continuo, por serlo T, pero la continuidad de $\tilde{T}^{-1}$ no está nada clara.

Que $\tilde{T}^{-1}$ sea continuo es lo mismo que decir que $\tilde{T}$ es una aplicación abierta y, puesto que la aplicación cociente π siempre es abierta, esto implicará que $\tilde{T}\circ\pi$ también sea abierta. Recíprocamente, si $\tilde{T}\circ\pi$ es abierta, dado un abierto $G \subseteq X/\ker T$, la continuidad de π nos asegura que $\pi^{-1}(G)$ es abierto en X, luego $[\tilde{T}\circ\pi]\big(\pi^{-1}(G)\big) = \tilde{T}(G)$ es abierto en $T(X)$, y vemos que $\tilde{T}$ es una aplicación abierta o, lo que es lo mismo, que $\tilde{T}^{-1}$ es continuo. En resumen, $\tilde{T}^{-1}$ es continuo si, y sólo si, $\tilde{T}\circ\pi$ es una aplicación abierta. Observemos finalmente que $\tilde{T}\circ\pi$ no es otra cosa que el propio operador T, sólo que visto como aplicación de X en $T(X)$. Hemos justificado la siguiente definición:

Si X e Y son espacios normados, un **homomorfismo topológico** de X en Y es un operador lineal y continuo $T: X \to Y$ tal que, visto como aplicación de X sobre $T(X)$, es una aplicación abierta, es decir, $T(A)$ es abierto relativo a $T(X)$ para todo conjunto abierto $A \subseteq X$. Naturalmente un homomorfismo topológico inyectivo recibe el nombre de **monomorfismo topológico** y un homomorfismo topológico sobreyectivo será un **epimorfismo topológico**. Observemos finalmente que un homomorfismo topológico biyectivo es precisamente lo que ya veníamos llamando **isomorfismo topológico**.

Para volver a la factorización canónica, observemos que si E es un espacio normado y F es un subespacio cerrado de E, considerando en E/F la norma cociente y en F la norma que hereda de E, tenemos que la aplicación cociente $\pi: E \to E/F$ es un epimorfismo topológico, porque es continua y abierta, y que la inclusión natural $I: F \to E$ es un monomorfismo topológico, ya que obviamente es continua y, vista como aplicación de F en $I(F) = F$, no es más que la identidad en F.

Por tanto, si X e Y son espacios normados y $T: X \to Y$ es un homomorfismo topológico, entonces T se factoriza según el diagrama anterior, en la forma $T = I\circ\tilde{T}\circ\pi$, donde π es un epimorfismo topológico, $\tilde{T}$ es un isomorfismo topológico y, finalmente, I es un monomorfismo topológico. Es fácil comprobar que esta factorización es única salvo isomorfismos topológicos y tenemos lo que podemos llamar el primer teorema de isomorfía en la categoría de espacios normados. Los resultados de este tema nos harán ver que la noción de homomorfismo topológico se maneja con mucha más comodidad cuando trabajamos con espacios de Banach.

9.2. Teorema de la aplicación abierta

De acuerdo con la discusión anterior, si X e Y son espacios normados, $T \in L(X,Y)$ y $T(X) = Y$, entonces T es un epimorfismo topológico si, y sólo si, T es una aplicación abierta. Pues bien, esta última condición es automática cuando X e Y son espacios de Banach. Este es el contenido del siguiente resultado, también conocido como *Teorema de Banach-Schauder:*

Teorema de la aplicación abierta de Banach. *Sean X e Y espacios de Banach* y $T : X \to Y$ *un operador lineal, continuo y sobreyectivo. Entonces T es una aplicación abierta.*

Dividiremos la demostración en dos etapas, dosificando las hipótesis de forma que quede claro lo que se consigue en cada paso.

9.2.1. Primera etapa: aplicaciones casi-abiertas

Empezamos la demostración suponiendo solamente que X e Y son espacios normados, $T : X \to Y$ un operador lineal y denotamos por $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ a la bola abierta unidad en X. El primer paso es una observación ya conocida: para que T sea una aplicación abierta es suficiente (y obviamente también necesario) que $T(B)$ sea un entorno de cero en Y. Recordemos la sencilla prueba de esta observación. Para cualquier abierto $A \subseteq X$ y cualquier $y_0 \in T(A)$, escribimos $y_0 = T(x_0)$ con $x_0 \in A$ y tomamos $r > 0$ tal que $x_0 + rB \subseteq A$. Entonces, si $T(B)$ es entorno de cero en Y, usando que las traslaciones y homotecias son homeomorfismos de Y tendremos que $y_0 + rT(B)$ es entorno de y_0, pero $y_0 + rT(B) = T(x_0 + rB) \subseteq T(A)$, luego $T(A)$ también es entorno de y_0 y hemos probado que $T(A)$ es entorno de todos sus puntos, es decir, es abierto. Por tanto, en la demostración del Teorema de la Aplicación Abierta, la meta final será probar que $T(B)$ es entorno de cero en Y.

Pues bien, echemos un vistazo al conjunto $T(B)$, lo que nos llevará de forma natural a usar las nociones de conjuntos de primera o segunda categoría. Es evidente que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$, con lo que la linealidad de T implica claramente que $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B)$. Nadie nos asegura que $T(B)$ sea cerrado en Y, de hecho rara vez lo será, pero siempre podemos cerrarlo y escribir:

$$T(X) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}. \qquad (*)$$

Si ahora suponemos que $T(X)$ es de segunda categoría en Y, de la inclusión $(*)$ deducimos que para algún $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $n\overline{T(B)}$ ha de tener interior no vacío, luego $\overline{T(B)}$ tiene interior no vacío. Usando la continuidad de la suma en Y junto con la linealidad de T, veremos que de hecho $\overline{T(B)}$ es entorno de cero. En efecto, si $\overline{T(B)}$ tiene un punto interior, el conjunto $\overline{T(B)} - \overline{T(B)}$ es entorno de cero, pero es claro que:

$$\overline{T(B)} - \overline{T(B)} \subseteq \overline{T(B) - T(B)} = \overline{T(B - B)} = \overline{T(2B)} = 2\overline{T(B)}.$$

Deducimos que $2\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y, luego lo mismo le ocurre a $\overline{T(B)}$. Pretendemos probar que $T(B)$ es entorno de cero y "casi" lo hemos conseguido.

Para enunciar explícitamente lo demostrado hasta ahora, es útil el siguiente concepto: si X e Y son espacios normados, se dice que una aplicación lineal $T : X \to Y$ es **casi-abierta** cuando $\overline{T(B)}$ es un entorno de cero en Y, donde B denota la bola abierta unidad de X. En la primera etapa de la demostración hemos probado lo siguiente:

Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces T es casi-abierta.

9.2.2. Segunda etapa: Aproximaciones sucesivas

Queremos sustituir en el último enunciado "casi-abierta" por "abierta", usando el resto de hipótesis del teorema conforme se vayan necesitando.

Expliquemos intuitivamente el tipo de razonamiento que vamos a hacer. Para $y \in Y$ con norma suficientemente pequeña, nos gustaría probar que $y \in T(B)$, es decir, que la ecuación $y = Tx$ admite una solución $x \in B$. Siendo T casi-abierta, podemos tener de entrada $y \in \overline{T(B)}$, luego podemos conseguir $x \in B$ de forma que Tx esté tan cerca de y como se quiera, es decir, tenemos soluciones "aproximadas" de nuestra ecuación y queremos conseguir una solución "exacta".

Para ello usamos un *método de aproximaciones sucesivas,* es decir, construimos iterativamente una sucesión de soluciones aproximadas cada vez mejores, que convergerá a la solución exacta que buscamos. La complitud de X, que aún no hemos utilizado, nos permitirá conseguir la convergencia de la soluciones aproximadas y la continuidad de T, que tampoco se ha usado hasta ahora, asegurará que el límite de las soluciones aproximadas es una solución exacta. Veamos cómo se desarrolla este método.

De entrada suponemos solamente lo conseguido en la primera etapa, es decir, X e Y son espacios normados y $T : X \to Y$ es lineal y casi-abierta. Existe entonces un $\delta > 0$ tal que $\overline{T(B)}$ contiene a la bola abierta en Y de centro cero y radio δ.

Observemos lo que ocurre cuando el radio de B se va dividiendo sucesivamente por 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, es claro que si tomamos $y \in Y$ con $\|y\| < 2^{-n}\delta$ tendremos $\|2^n y\| < \delta$, luego $2^n y \in \overline{T(B)}$, de donde $y \in 2^{-n}\overline{T(B)} = \overline{T(2^{-n}B)}$; cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ podremos pues encontrar $x \in X$ con $\|x\| < 2^{-n}$ tal que $\|y - Tx\| < \varepsilon$. Destaquemos esta información, que es la que vamos a usar iterativamente:

$$n \in \mathbb{N},\ y \in Y,\ \|y\| < \frac{\delta}{2^n}\ ,\ \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x \in X\ : \|x\| < \frac{1}{2^n}\ ,\ \|y - Tx\| < \varepsilon. \qquad \diamondsuit$$

Arrancamos nuestra iteración fijando $y \in Y$ con $\|y\| < \delta/2$. Aplicando $\diamondsuit$, con $n = 1$ y $\varepsilon = \delta/4$, encontramos un vector x_1 que verifica:

$$x_1 \in X,\ \|x_1\| < \frac{1}{2}\ ,\ \|y - Tx_1\| < \frac{\delta}{4}\ .$$

La última desigualdad nos dice que podemos aplicar de nuevo $\diamondsuit$ al vector $y - Tx_1 \in Y$, con $n = 2$ y $\varepsilon = \delta/8$, para encontrar un vector x_2 que verifica:

$$x_2 \in X,\ \|x_2\| < \frac{1}{4}\ ,\ \|y - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{\delta}{8}\ .$$

Está ya muy claro cómo, una vez construidos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, encontramos x_{n+1}. En resumen, hemos construido por inducción una sucesión $\{x_n\}$ de vectores de X que verifican:

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^n}\ , \ \Big\|y - \sum_{k=1}^{n} T x_k\Big\| < \frac{\delta}{2^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

La última desigualdad nos dice que:

$$y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} T x_k = \sum_{n=1}^{\infty} T x_n,$$

así que, $\big\{\sum_{k=1}^{n} x_k\big\}$ es la sucesión de soluciones aproximadas de la que hablábamos, que ha aparecido como sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$.

Por otra parte, también tenemos: $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, luego nuestra serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es absolutamente convergente. Si X es un espacio de Banach, dicha serie será convergente y podemos definir $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, obteniendo un vector $x \in B$, ya que claramente: $\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 1$.

Usamos ahora la linealidad y continuidad de T para obtener:

$$T(x) = T\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} T x_k = \sum_{n=1}^{\infty} T x_n = y,$$

luego x es la solución exacta que buscábamos y tenemos que $y \in T(B)$. Puesto que y era cualquier vector de Y verificando $\|y\| < \delta/2$, hemos probado que $T(B)$ es entorno de cero en Y, luego T es una aplicación abierta. Enunciamos explícitamente lo conseguido mediante el método de aproximaciones sucesivas:

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal, continua y casi-abierta. Entonces T es abierta.

9.2.3. Fin de la demostración

Podemos ya completar fácilmente la demostración del Teorema de la Aplicación Abierta. Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ es sobreyectivo, el Lema de Categoría de Baire nos asegura que $T(X)$ es de segunda categoría en Y, con lo que la primera etapa de la demostración nos dice que T es una aplicación casi-abierta. Este hecho, junto con la complitud de X y la continuidad de T, nos permite aplicar lo conseguido con el método de aproximaciones sucesivas para concluir que T es una aplicación abierta.

Merece la pena hacer una disquisición final sobre esta demostración. Si se observa el último razonamiento, la complitud de Y y la sobreyectividad de T sólo se usan para asegurar que $T(X)$ es de segunda categoría en Y, cosa que directamente no será fácil de comprobar en la práctica. Sin embargo, para no perder información, podemos enunciar literalmente lo que se obtiene encadenando las dos primeras etapas de la demostración, que es lo siguiente:

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces T es una aplicación abierta. Como consecuencia, se tiene que $T(X) = Y$ y que Y es un espacio de Banach.

La primera parte de este enunciado está clara. La segunda puede resultar sorprendente, puesto que dos hipótesis del Teorema de la Aplicación Abierta, la sobreyectividad de T y la complitud de Y, no sólo no se suponen como hipótesis, sino que aparecen como tesis. Sin embargo, la validez de esta segunda parte del enunciado es clara: una aplicación abierta tiene que ser sobreyectiva, luego $Y = T(X)$; además T es un epimorfismo topológico, con lo que la factorización canónica de T nos dice que Y es topológicamente isomorfo a $X/\ker T$, que es completo por ser el cociente del espacio de Banach X por un subespacio cerrado, así que Y es completo. Así pues, el enunciado anterior es más fuerte que el Teorema de la Aplicación Abierta. Sin embargo, en la práctica la hipótesis de que $T(X)$ sea de segunda categoría en Y no es fácil de comprobar.

9.3. Dos versiones equivalentes

Si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ es biyectivo, decir que T es una aplicación abierta equivale a decir que el operador T^{-1} es continuo, luego del Teorema de la Aplicación Abierta deducimos:

Teorema de los Isomorfismos de Banach. *Toda biyección lineal continua entre dos espacios de Banach es un isomorfismo topológico.*

El Teorema anterior es en realidad equivalente al Teorema de la Aplicación Abierta: si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ es sobreyectivo, la factorización canónica de T nos da una biyección lineal continua $\tilde{T}$ de $X/\ker T$ sobre $T(X) = Y$ tal que $T = \tilde{T} \circ \pi$ donde $\pi : X \to X/\ker T$ es la aplicación cociente. Por el Teorema de los Isomorfismos de Banach, el operador $\tilde{T}^{-1}$ es continuo, es decir, $\tilde{T}$ es una aplicación abierta y, puesto que π también es abierta, deducimos que T es abierta.

En la dirección contraria, en vez de fortalecer la hipótesis de sobreyectividad del operador T en el Teorema de la Aplicación Abierta, como hemos hecho al suponerlo biyectivo, podemos omitir dicha hipótesis y obtenemos la siguiente información:

Teorema del Homomorfismo de Banach. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Entonces T es un homomorfismo topológico si, y sólo si, $T(X)$ es cerrado en Y.*

En efecto, si $T(X)$ es cerrado en Y, será un espacio de Banach y, viendo T como operador de X en $T(X)$, es sobreyectivo, luego es un aplicación abierta y esto significa, por definición, que T es un homomorfismo topológico de X en Y. Recíprocamente, si T es un homomorfismo topológico, entonces $T(X)$ es topológicamente isomorfo al espacio de Banach $X/\ker T$, luego es completo y, por tanto, ha de ser cerrado en Y. De este último enunciado se deduce evidentemente el Teorema de la Aplicación Abierta, con lo que tenemos tres formulaciones equivalentes de un mismo principio.

9.4. Una aplicación a ecuaciones diferenciales

Sean una vez más X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Si T es biyectivo, es decir, si para cada $y \in Y$ la ecuación $Tx = y$ tiene solución única, el Teorema de los Isomorfismos de Banach nos dice que T^{-1} es continuo, es decir, la solución $x \in X$ de la ecuación depende de manera continua del dato $y \in Y$. Este esquema abstracto se puede aplicar a problemas relacionados con ecuaciones diferenciales en situaciones muy diversas, de las que vamos a presentar un ejemplo sencillo.

Consideremos el espacio Banach $C[a,b]$ de todas las funciones continuas en un intervalo compacto $[a,b]$, con la norma del máximo, y fijemos tres funciones $u_0, u_1, u_2 \in C[a,b]$. Consideremos el espacio $Y = C[a,b] \times \mathbb{K}^2$, que también es un espacio de Banach cuando lo dotamos, por ejemplo, de la norma:

$$\|(u,\alpha,\beta)\| = \|u\|_\infty + |\alpha| + |\beta| \quad (u \in C[a,b],\ \alpha,\beta \in \mathbb{K}).$$

Para cada terna $(u,\alpha,\beta) \in Y$, podemos considerar el problema de contorno:

$$u_0 x'' + u_1 x' + u_2 x = u\ ; \quad x(a) = \alpha\ ,\ x(b) = \beta.$$

Las posibles soluciones x de este problema pertenecerán al espacio $X = C^2[a,b]$ de las funciones de clase C^2 en el intervalo $[a,b]$. Se comprueba sin dificultad que X es también un espacio de Banach cuando le dotamos de la norma definida por:

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty \quad (x \in X).$$

Asociado al problema de contorno anterior, tenemos un operador lineal $T : X \to Y$ que viene definido por:

$$Tx = \big(u_0 x'' + u_1 x' + u_2 x, x(a), x(b)\big) \quad (x \in X).$$

Comprobamos sin dificultad que T es continuo. En efecto, si $M \geqslant \|u_j\|_\infty$ para $j = 0,1,2$, tenemos claramente:

$$\|Tx\| = \|u_0 x'' + u_1 x' + u_2 x\|_\infty + |x(a)| + |x(b)| \leqslant M\|x\| + 2\|x\|_\infty \leqslant (M+2)\|x\| \quad (x \in X).$$

Que T sea biyectivo equivale evidentemente a que, para cualquier dato $u \in C[a,b]$ y cualesquiera valores de contorno $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, el problema de contorno tenga solución única.

Supongamos entonces que dicho problema de existencia y unicidad está resuelto afirmativamente y por tanto sabemos que el operador T es biyectivo. Entonces, el Teorema de los Isomorfismos de Banach nos informa de que, automáticamente, la solución $x \in C^2[a,b]$ del problema de contorno depende de manera continua de los datos y de los valores de contorno. Esto garantiza que los métodos de perturbación que suelen usarse para aproximar numéricamente la solución del problema son válidos. Evidentemente este tipo de razonamiento puede usarse en situaciones muy variadas.

9.5. Inversión de operadores

El Teorema de los Isomorfismos de Banach puede usarse para caracterizar la posibilidad de que un operador lineal continuo admita un inverso por la izquierda o por la derecha que también sea continuo.

Sólo para fijar la notación y aclarar ideas, recordemos cuestiones elementales de álgebra lineal. Denotando por Id_E a la aplicación identidad en cualquier conjunto E, es claro que un operador lineal $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios vectoriales, es biyectivo si, y sólo si, existe otro operador lineal $S : Y \to X$ tal que $S \circ T = \mathrm{Id}_X$ y $T \circ S = \mathrm{Id}_Y$. En tal caso desde luego S es único, le llamamos operador inverso de T y escribimos $S = T^{-1}$. Es natural decir que S es un **inverso por la izquierda** de T cuando verifica solamente que $S \circ T = \mathrm{Id}_X$ y un **inverso por la derecha** de T cuando $T \circ S = \mathrm{Id}_Y$. Se comprueba inmediatamente que el operador T admite un inverso por la izquierda si, y sólo si, es inyectivo, mientras que admite un inverso por la derecha si, y sólo si, es sobreyectivo. Es claro que si T es biyectivo, T^{-1} es el único inverso por la izquierda y el único inverso por la derecha de T. En otro caso se pierde la unicidad: cuando el operador T no es biyectivo, un inverso por la izquierda de T, si existe, nunca es único y lo mismo ocurre con los inversos por la derecha.

Pues bien, intentemos dar contenido topológico a la discusión anterior, suponiendo lógicamente que X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Sabemos que cuando T es biyectivo, su único inverso T^{-1} es continuo. Suponiendo solamente que T es inyectivo, es lógico preguntarse si admite un inverso por la izquierda que sea continuo y análoga pregunta para un operador sobreyectivo y un inverso por la derecha. Las respuestas se recogen en el siguiente enunciado, cuya demostración, fácil consecuencia del Teroema de los Isomorfismos de Banach, queda como ejercicio.

Corolario. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Entonces:*

(a) *Existe un operador $S \in L(Y,X)$ tal que $S \circ T = \mathrm{Id}_X$ si, y sólo si,* $\ker T = \{0\}$ *y $T(X)$ es un subespacio complementado de Y.*

(b) *Existe un operador $S \in L(Y,X)$ tal que $T \circ S = \mathrm{Id}_Y$ si, y sólo si,* $\ker T$ *es un subespacio complementado de X y $T(X) = Y$.*

9.6. Teorema de la Gráfica Cerrada

Recordemos que la **gráfica** de una función $f : X \to Y$, donde X e Y son conjuntos cualesquiera, es el conjunto $\mathrm{Gr}\, f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$. Cuando X e Y tienen alguna estructura adicional, es frecuente que ciertas propiedades de la función f puedan caracterizarse en términos de su gráfica. Por ejemplo, cuando X e Y son espacios vectoriales, es fácil comprobar que f es lineal si, y sólo si, $\mathrm{Gr}\, f$ es un subespacio vectorial de $X \times Y$.

Cuando X e Y son espacios topológicos y consideramos en $X \times Y$ la topología producto, es fácil establecer una relación entre la continuidad de f y el hecho de que $\mathrm{Gr}\, f$ sea un subconjunto cerrado de $X \times Y$. Concretamente, *si Y es un espacio de Hausdorff, toda función continua $f : X \to Y$ tiene gráfica cerrada.* En efecto, dado $(x,y) \in X \times Y$ suponemos que $(x,y) \notin \mathrm{Gr}\, f$, es decir, que $y \neq f(x)$, y vamos a ver que $(x,y) \notin \overline{\mathrm{Gr} f}$. Por ser Y de Hausdorff, tenemos en Y un entorno W de $f(x)$ y un entorno V de y tales que $W \cap V = \emptyset$. La continuidad de f nos proporciona en X un entorno U de x tal que $f(U) \subseteq W$. Entonces $U \times V$ es un entorno de (x,y) en la topología producto que cumple $(U \times V) \cap \mathrm{Gr} f = \emptyset$, ya que si $z \in X$ verificase que $(z, f(z)) \in U \times V$ se tendría por una parte que $z \in U$, luego $f(z) \in W$, y por otra que $f(z) \in V$, luego $f(z) \in W \cap V = \emptyset$, flagrante contradicción.

Ejemplos sencillos, incluso con $X = Y = \mathbb{R}$, muestran que el recíproco no es cierto. Así pues, en general, para una función entre espacios topológicos, a poco que el de llegada sea de Hausdorff, tener gráfica cerrada es más débil que ser continua. Se comprende ahora el interés del siguiente resultado:

Teorema de la Gráfica Cerrada de Banach. *Si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal, entonces T es continuo si, y sólo si, la gráfica de T es cerrada.*

Demostración. Una implicación ya se ha comentado, nos concentramos en la otra. Sabemos que el espacio producto $X \times Y$ es un espacio de Banach y, por hipótesis, la gráfica de T es un subespacio cerrado de $X \times Y$, luego también es un espacio de Banach. La proyección en primera coordenada $(x,y) \mapsto x$ es un operador lineal continuo de $X \times Y$ en X, luego también lo será su restricción a la gráfica de T, es decir, el operador $\Phi : \mathrm{Gr}\, T \to X$ definido por:

$$\Phi(x, Tx) = x \quad (x \in X).$$

Es evidente que Φ es biyectivo, luego el Teorema de los Isomorfismos de Banach nos dice que Φ^{-1} es continuo, y es también evidente que

$$\Phi^{-1}(x) = (x, Tx) \quad (x \in X).$$

Como cualquier función que toma valores en un espacio con una topología producto, la continuidad de Φ^{-1} equivale a la de sus dos componentes, pero la segunda componente de Φ^{-1} es precisamente el operador T, así que T es continuo, como queríamos demostrar. ■

Ha quedado claro que el Teorema anterior es una consecuencia casi inmediata del Teorema de los Isomorfismos de Banach, pero recíprocamente, admitiendo el Teorema de la Gráfica Cerrada, vamos a ver que el de los Isomorfismos de Banach resulta casi evidente. En efecto, si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal biyectivo, observamos la clara relación entre las gráficas de T y T^{-1}:

$$\mathrm{Gr}\, T^{-1} = \{(y, T^{-1}y) : y \in Y\} = \{(Tx, x) : x \in X\}.$$

Vemos que $\mathrm{Gr}\, T^{-1}$ es la imagen de $\mathrm{Gr}\, T$ por la aplicación $(x,y) \mapsto (y,x)$, que es obviamente un homeomorfismo de $X \times Y$ sobre $Y \times X$. Por tanto, T^{-1} tiene gráfica cerrada si, y sólo si, la tiene T. Por el Teorema de la Gráfica Cerrada, T^{-1} es continuo si, y sólo si, lo es T.

La linealidad de un operador hace especialmente fácil discutir si su gráfica es cerrada o no. Supongamos que X e Y son espacios normados cualesquiera y $T : X \to Y$ un operador lineal. Es claro que T tiene gráfica cerrada cuando verifica lo siguiente: si $\{x_n\} \to x$ en X y $\{Tx_n\} \to y$ en Y, entonces $y = Tx$. La hipótesis $\{x_n\} \to x$ equivale a $\{x_n - x\} \to 0$, mientras que $\{Tx_n\} \to y$ equivale a $\{T(x_n - x)\} \to y - Tx$; finalmente, la tesis $y = Tx$ es lo mismo que decir $y - Tx = 0$. Por tanto, un evidente cambio de notación nos permite concluir que T tiene gráfica cerrada si, y sólo si, verifica la siguiente condición más sencilla:

$$\{x_n\} \to 0 \text{ en } X, \quad \{Tx_n\} \to y \in Y \implies y = 0 \tag{1}$$

Comparemos esta condición con la continuidad de T, que sabemos equivale a la continuidad en 0, con lo que T es continuo cuando

$$\{x_n\} \to 0 \text{ en } X \implies \{Tx_n\} \to 0 \text{ en } Y \tag{2}$$

Nótese la sutil pero importante diferencia entre las condiciones (1) y (2): en ambos casos se parte de una sucesión $\{x_n\}$ convergente a cero en X pero, mientras en (2) hay que probar que la sucesión $\{Tx_n\}$ converge a cero en Y, en (1) podemos de entrada suponer que la sucesión $\{Tx_n\}$ es convergente y sólo nos queda probar que su límite es cero. Cualquiera que tenga experiencia con la convergencia de sucesiones sabe que lo segundo es usualmente mucho más fácil que lo primero, suele ser fácil calcular el límite de una sucesión cuando se sabe de antemano que la sucesión converge. En las aplicaciones del Teorema de la Gráfica Cerrada comprobaremos que efectivamente (1) es mucho más fácil de comprobar que (2), de ahí la gran utilidad del teorema.

9.7. Aplicaciones del Teorema de la Gráfica Cerrada

Como ejemplo que sirve de motivación, consideremos el espacio de Banach $C[0,1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ con la norma del máximo y sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ un operador lineal. Probar directamente que T es continuo nos lleva a considerar una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas, que converge uniformemente a cero en $[0,1]$, e intentar probar que $\{Tf_n\}$ también converge a cero *uniformemente* en $[0,1]$. Supongamos que, con la misma hipótesis sobre $\{f_n\}$, sólo hemos conseguido comprobar que $\{Tf_n\}$ converge *puntualmente* a cero en $[0,1]$. Esto es suficiente para concluir que T tiene gráfica cerrada, y el Teorema de la Gráfica Cerrada se encarga de asegurarnos la continuidad de T. En efecto, para comprobar que T tiene gráfica cerrada, partimos igualmente de que $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente en $[0,1]$, pero suponemos también de entrada que $\{Tf_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ a una función $g \in C[0,1]$. Ahora bien, sabemos que $\{Tf_n\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$ y, por otra parte, también converge puntualmente en $[0,1]$ a la función g, luego no queda más salida que $g = 0$, como se quería.

El siguiente enunciado generaliza ampliamente lo que ocurre en el ejemplo anterior.

Corolario. *Sean X e Y espacios de Banach y E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, esto es, que verifique*

$$y \in Y\,, \;\; y^*(y) = 0 \;\; \forall\, y^* \in E \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Entonces un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si, $y^* \circ T$ es continuo para todo $y^* \in E$, es decir, $y^* \circ T \in X^*$ para todo $y^* \in E$.

Demostración. Si T es continuo, es obvio que $y^* \circ T \in X^*$ para todo $y^* \in E$. Para probar el recíproco, siendo X e Y espacios de Banach, el Teorema de la Gráfica Cerrada nos dice que basta comprobar que T tiene gráfica cerrada. Tomamos por tanto una sucesión $\{x_n\}$ convergente a cero en X, suponemos que $\{Tx_n\} \to y \in Y$, y hemos de ver que $y = 0$. En efecto, para cada $y^* \in E$, aplicando que $y^* \circ T$ es continuo por hipótesis, tenemos que $\{y^*(Tx_n)\} \to 0$, pero aplicando que y^* es continuo también tenemos que $\{y^*(Tx_n)\} \to y^*(y)$, luego $y^*(y) = 0$. Aplicando que E separa los puntos de Y, deducimos que $y = 0$, como queríamos. ■

El Teorema de Hahn-Banach nos asegura que Y^* separa los puntos de Y, así que siempre podemos tomar $E = Y^*$ en el Corolario anterior. Obtenemos que los duales X^* e Y^* son capaces de caracterizar la continuidad de un operador lineal $T : X \to Y$ entre espacios de Banach:

Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si, y sólo si, $y^* \circ T \in X^*$ para todo $y^* \in Y^*$.

Sin embargo, es claro que el último Corolario es tanto más útil cuanto más pequeño sea el conjunto E que usemos. A plena generalidad, sin más información sobre Y, la elección $E = Y^*$ es la única disponible, pero en casos concretos es frecuente que podamos utilizar conjuntos de funcionales mucho más pequeños. Esto es lo que ocurría en el caso $X = Y = C[0,1]$ que hemos analizado previamente y no es difícil adivinar cual ha sido el conjunto $E \subseteq C[0,1]^*$ que implícitamente hemos usado.

Otros casos muy interesantes se presentan cuando el espacio de Banach Y es un espacio de sucesiones con una norma apropiada. Supongamos por ejemplo que $Y = l_p$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Podemos entonces definir

$$y_n^*(y) = y(n) \qquad (y \in Y, n \in \mathbb{N})$$

y es evidente que $y_n^* \in Y^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. También es claro que el conjunto $E = \{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de Y. Aplicando el último corolario, deducimos lo siguiente: *si X es un espacio de Banach y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, un operador lineal $T : X \in l_p$ es continuo si, y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$ el funcional lineal en X dado por $x \mapsto [Tx](n)$ es continuo.* Así pues, la continuidad de un operador con valores en l_p equivale a la de una sucesión de funcionales lineales en X.

9.8. Sumas topológico-directas

Los resultados de este tema nos dan un criterio muy claro para decidir si una descomposición de un espacio de Banach como suma directa de dos subespacios es o no una suma topológico-directa.

Recordemos esta noción, aprovechando para fijar la notación. Sea X un espacio normado descompuesto como suma directa de dos subespacios, $X = Y \oplus Z$. Tenemos una biyección lineal $\varphi : Y \times Z \to X$ dada por $\varphi(y,z) = y + z$ para todo $(y,z) \in Y \times Z$, que sabemos es continua en el espacio producto $Y \times Z$. También tenemos las proyecciones lineales P y Q en X que verifican $Y = P(X) = \ker Q$ y $Z = \ker P = Q(X)$, relacionadas con φ por la igualdad $\varphi^{-1}(x) = (Px, Qx)$, válida para todo $x \in X$.

Recordamos que la suma es topológico-directa cuando φ^{-1} es continua, equivalentemente cuando P y Q son continuas, para lo que basta la continuidad de una de ellas, pues su suma es la identidad en X.

Si la suma es topológico-directa, es evidente que $Y = \ker Q$ y $Z = \ker P$ son subespacios cerrados de X. Asumida esta condición necesaria, consideramos el espacio normado cociente X/Y, junto con la biyección lineal $\psi : Z \to X/Y$ dada por $\psi(z) = z + Y$ para todo $z \in Z$. Sabemos que la suma es topológico-directa si, y sólo si, ψ^{-1} es continua, e igualmente podríamos razonar con una biyección lineal de Y sobre X/Z.

Pues bien, vamos a ver que en el caso de que X sea un espacio de Banach, la condición obviamente necesaria para que la suma sea topológico-directa, también es suficiente:

Corolario. *Supongamos que un espacio de Banach X es suma directa de dos subespacios cerrados: $X = Y \oplus Z$. Entonces X es suma topológico-directa de Y con Z.*

Podemos razonar de varias formas:

Por una parte, $\varphi : Y \times Z \to X$ es una biyección lineal continua entre dos espacios de Banach, luego el Teorema de los Isomorfismos de Banach nos asegura que φ^{-1} es continua, es decir, la suma es topológico-directa.

Alternativamente, podemos pensar que X/Y es un espacio de Banach, como cociente de un espacio de Banach por un subespacio cerrado, luego $\psi : Z \to X/Y$ es una biyección lineal continua entre dos espacios de Banach y de nuevo el Teorema de los Isomorfismos de Banach nos dice que ψ^{-1} es continua, luego la suma es topológico-directa.

Finalmente podemos aplicar el Teorema de la Gráfica Cerrada a la proyección $P : X \to X$, y bastará ver que P tiene gráfica cerrada. Tomada una sucesión $\{x_n\}$ en X tal que $\{x_n\} \to 0$ y $\{Px_n\} \to x \in X$ bastará ver que $x = 0$. Por ser Y cerrado y $Px_n \in Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos por una parte que $x \in Y$. Por otra, como $Px_n - x_n \in Z$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{Px_n - x_n\} \to x$, de ser Z cerrado deducimos que $x \in Z$, así que $x \in Y \cap Z = \{0\}$, y $x = 0$ como queríamos.

A la vista del Corolario anterior, un subespacio Y está complementado en un espacio de Banach X si, y sólo si, Y es cerrado y admite un complemento algebraico que también es cerrado en X. Cuando Y es cerrado en X pero no está complementado, lo que ocurre es que ninguno de los complementos algebraicos de Y en X es cerrado.

Tema 10

Espacios de Hilbert

Vamos a desarrollar en lo que sigue los resultados básicos acerca de los espacios de Hilbert, un tipo muy particular de espacios de Banach con propiedades especiales que están muy lejos de verificarse en espacios de Banach generales. El tratamiento de este tema es anti-histórico, ya que los espacios de Hilbert eran bien conocidos, y su estudio se podía considerar completo, mucho antes de que se empezara a trabajar con espacios de Banach en general. A cambio, las nociones y resultados que hemos venido manejando anteriormente permiten desarrollar la teoría de los espacios de Hilbert con bastante comodidad y rapidez, evitando las repeticiones que inevitablemente se hubieran producido al tratar determinadas cuestiones en un contexto particular, para después generalizarlas.

10.1. Producto Escalar y Norma

Como motivación para los conceptos que vamos a introducir, recordemos la definición del producto escalar $(x|y)$ de dos vectores $x,y \in \mathbb{K}^N$

$$(x|y) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\,\overline{y(k)}$$

que está relacionado con la norma euclídea por la igualdad

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{N} |x(k)|^2 = (x|x) \qquad (x \in \mathbb{K}^N)$$

De manera más general, un **producto escalar** en un espacio vectorial X es una aplicación $(x,y) \mapsto (x|y)$, de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, que verifica las cuatro condiciones siguientes:

(i) *Es lineal en la primera variable:*

$$(\alpha u + v\,|\,y) = \alpha\,(u|y) + (v|y) \qquad (\alpha \in \mathbb{K},\ u,v,y \in X)$$

(ii) *Es conjugado-lineal en la segunda variable:*

$$(x \mid \alpha u + v) = \overline{\alpha}\,(x|u) + (x|v) \qquad (\alpha \in \mathbb{K},\ x,u,v \in X)$$

Las dos condiciones anteriores se resumen diciendo que $(\cdot|\cdot)$ es una **forma sexquilineal** en X. Obsérvese que, en el caso real, decir "sexquilineal" es tanto como decir "bilineal", o lineal en cada variable. Vamos con la tercera condición:

(iii) *Es* **hermítica**:

$$(y|x) = \overline{(x|y)} \qquad (x,y \in X)$$

En el caso real, decir "hermítica" es tanto como decir "simétrica". En el caso complejo, esta condición implica que la aplicación $x \mapsto (x|x)$ toma valores en $\mathbb{R}$. En cualquier caso, la función con valores reales que se obtiene al igualar las dos variables en una forma sexquilineal hermítica, recibe el nombre de **forma cuadrática**. La siguiente condición exige que nuestra forma cuadrática sea **definida positiva**:

(iv) *Verifica que:*

$$x \in X\,,\ x \neq 0 \ \Rightarrow \ (x|x) > 0$$

En resumen, un producto escalar es una *forma sexquilineal hermítica que da lugar a una forma cuadrática definida positiva.* Nótese que hay redundancia en la definición anterior: la condición (ii) es clara consecuencia de (i) y (iii). Haber hecho una definición más extensa nos ha permitido introducir cierta nomenclatura, poner nombre a las aplicaciones que verifican algunas de las propiedades de un producto escalar, aunque no todas.

Llamamos **espacio pre-hilbertiano** a un espacio vectorial X dotado de un producto escalar $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$. Veremos que entonces X se convierte en un espacio normado, sin más que definir:

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X)$$

Dos de las propiedades que debe cumplir una norma se comprueban inmediatamente. En efecto, para $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene:

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x \mid \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}\,(x|x) = |\lambda|^2\|x\|^2$$

luego $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$. También es claro que $\|x\| = 0$ implica $x = 0$. La desigualdad triangular es consecuencia de la siguiente, que tiene interés en sí misma:

Desigualdad de Cauchy-Schwartz. *Si X es un espacio pre-hilbertiano, se tiene:*

$$|(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

para cualesquiera $x,y \in X$. Sólo se verifica la igualdad cuando x e y son linealmente dependientes, es decir, $y = 0$ o $x \in \mathbb{K}y$.

Demostración. Fijamos $y \in X$ y suponemos sin perder generalidad que $y \neq 0$. Para cualesquiera $z \in X$ y $t \in \mathbb{R}$, usando las propiedades del producto escalar, tenemos:

$$0 \leqslant (ty - z|ty - z) = t^2\|y\|^2 - t[(z|y) + (y|z)] + \|z\|^2 = at^2 + bt + c \qquad (1)$$

donde $a = \|y\|^2$, $b = -2\mathrm{Re}\,(z|y)$ y $c = \|z\|^2$ son números reales, con $a > 0$. Por tanto, el trinomio de segundo grado $at^2 + bt + c$ no toma valores negativos y deducimos que la ecuación $at^2 + bt + c = 0$ no puede tener dos soluciones reales y distintas, lo que implica $b^2 - 4ac \leqslant 0$. El mismo resultado se obtiene tomando directamente $t = -b/2a$. Esto prueba que

$$\mathrm{Re}\,(z|y) \leqslant \|z\|\,\|y\| \tag{2}$$

para todo $z \in X$. Observemos que si se da la igualdad en (2) la ecuación $at^2 + bt + c = 0$ tiene una solución $t \in \mathbb{R}$, lo que en vista de (1) implica que $z = ty$.

Fijamos ahora $x \in X$ y escribimos $|(x|y)| = \alpha\,(x|y) = (\alpha x|y)$ con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $|\alpha| = 1$. Puesto que $(\alpha x|y)$ es obviamente un número real, tomando $z = \alpha x$ en (2) tenemos:

$$|(x|y)| = (z|y) = \mathrm{Re}\,(z|y) \leqslant \|z\|\,\|y\| = \|x\|\,\|y\| \tag{3}$$

que era la desigualdad buscada.

Si se da la igualdad en (3) para un $x \in X$, tenemos claramente la igualdad en (2) para $z = \alpha x$, pero esto implicaba que $z = ty$ para algún $t \in \mathbb{R}$, de donde $x = \overline{\alpha} t y \in \mathbb{K} y$. Recíprocamente, es claro que la condición $x \in \mathbb{K} y$ implica la igualdad en (3). ■

Desigualdad triangular. *Si X es un espacio pre-hilbertiano, se tiene:*

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$$

Se verifica la igualdad si, y sólo si, $y = 0$ o $x = \rho y$ con $\rho \geqslant 0$.

Demostración. Usando de nuevo las propiedades del producto escalar y la Desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x|y) + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Además, supuesto $y \neq 0$, el razonamiento anterior nos dice que la igualdad $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ implica otras dos igualdades:

$$\mathrm{Re}\,(x|y) = |(x|y)| = \|x\|\,\|y\|$$

La segunda es la igualdad en la Desigualdad de Cauchy-Schwartz que implica, como sabemos, que $x = \rho y$ con $\rho \in \mathbb{K}$. Pero entonces la primera igualdad nos dice que $\mathrm{Re}\,\rho = |\rho|$, luego ρ es real y no negativo. El recíproco es evidente. ■

En resumen, todo espacio pre-hilbertiano X es automáticamente un espacio normado, con la norma asociada a su producto escalar, determinada por la igualdad $\|x\|^2 = (x|x)$ para todo $x \in X$. Cuando esta norma es completa se dice que X es un **espacio de Hilbert**. Queda claro que se trata de un tipo particular de espacios de Banach, justo aquellos en los que la función $x \mapsto \|x\|^2$ es una forma cuadrática.

Ahora que en todo espacio pre-hilbertiano tenemos una norma, y por tanto las correspondientes distancia y topología, podemos extraer una importante consecuencia de la Desigualdad de Cauchy-Schwartz: *el producto escalar de cualquier espacio pre-hilbertiano X es continuo* *en* $X \times X$ *con la topología producto,* es decir, es una función juntamente continua en sus dos variables. En efecto, para cualesquiera sucesiones convergentes $\{x_n\} \to x$ e $\{y_n\} \to y$ en X, y para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$|(x_n|y_n) - (x|y)| \leqslant |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n) - (x|y)| \leqslant \|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y_n - y\|$$

pero $\{\|x_n - x\|\} \to 0$, $\{\|y_n - y\|\} \to 0$ y $\{\|y_n\|\} \to \|y\|$, luego $\{(x_n|y_n)\} \to (x|y)$.

10.2. Igualdad del Paralelogramo

Para recorrer un camino inverso al que hemos seguido hasta ahora, empezamos observando que el producto escalar de un espacio pre-hilbertiano X queda determinado por la norma. En efecto, consideremos las dos igualdades siguientes, ya usadas antes:

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,(x|y) + \|y\|^2 \qquad (x, y \in X) \tag{4}$$

Restando ambas igualdades (enseguida caeremos en la tentación de sumarlas) obtenemos:

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\,(x|y) \quad (x, y \in X) \tag{5}$$

y en el caso real ya hemos conseguido lo que queríamos:

$$(x|y) = \frac{1}{4}\,(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (x, y \in X) \tag{6}$$

En el caso complejo, basta observar que $\mathrm{Im}\,(x|y) = \mathrm{Re}\,(x|iy)$, con lo que aplicando dos veces la igualdad (5) obtenemos también:

$$(x|y) = \frac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2\big) \qquad (x, y \in X) \tag{7}$$

En Geometría, las igualdades (6) y (7) reciben el nombre de **identidades de polarización**. Si se piensa un momento, para probarlas sólo hemos usado que el producto escalar es una forma sexquilineal hermítica, así que tales identidades sirven para obtener una tal forma a partir de la forma cuadrática asociada, que es lo que en Geometría se entiende por “polarizar”. Por tanto, dos formas sexquilineales hermíticas son iguales cuando las formas cuadráticas asociadas coinciden. En el caso real, una forma cuadrática estará asociada a una, y sólo una, forma bilineal simétrica.

Por lo que aquí nos interesa, las identidades de polarización nos informan de que dos espacios pre-hilbertianos que podamos identificar como espacios normados, también son idénticos como espacios pre-hilbertianos. Más concretamente, si X y Z son espacios pre-hilbertianos y $T : X \to Z$ es un isomorfismo isométrico, las identidades de polarización nos dicen que:

$$(Tx|Ty) = (x|y) \qquad (x, y \in X)$$

donde estamos usando la misma notación para los productos escalares de X y Z. Así pues, T conserva el producto escalar, luego identifica totalmente los espacios pre-hilbertianos X y Z.

Podemos ahora preguntarnos cuándo un espacio normado es un espacio pre-hilbertiano, es decir, qué normas proceden de un producto escalar o, más sugestivamente, cuándo podemos afirmar que el cuadrado de una norma es una forma cuadrática. Cualquier respuesta a esta pregunta nos dará una caracterización de los espacios de Hilbert entre los espacios de Banach. Existen respuestas muy diversas, entre las que probaremos la más clásica, la primera que se obtuvo, aunque no sea la mejor.

Sumando las igualdades (4), obtenemos que en todo espacio pre-hilbertiano X se tiene:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (x, y \in X) \tag{8}$$

Obsérvese que esta igualdad sólo involucra el espacio vectorial real generado por los dos vectores que en ella aparecen. En el caso no trivial de que este espacio vectorial tenga dimensión 2, la igualdad tiene una clara interpretación geométrica: *en cualquier paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados*. Es por esto que (8) recibe el nombre de **igualdad del paralelogramo.** Por sorprendente que pueda parecer, esta identidad caracteriza a los espacios pre-hilbertianos:

Teorema de Jordan-Von Neumann. *Si X es un espacio normado, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X es un espacio pre-hilbertiano, es decir, existe un producto escalar $(\cdot|\cdot)$ en X tal que $\|x\|^2 = (x|x)$ para todo $x \in X$.*
(ii) *La norma de X verifica la igualdad del paralelogramo, es decir, se tiene*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Omitimos la demostración de este teorema, que es laboriosa, aunque no difícil. Veremos algunas consecuencias del teorema que merecen ser destacadas. En primer lugar, la continuidad de la norma y las operaciones de un espacio normado X hace evidente que X verifica la igualdad del paralelogramo tan pronto como la verifique un subespacio denso de X. Si Y es un subespacio denso de un espacio normado X y sabemos que Y es un espacio pre-hilbertiano, entonces también X es un espacio pre-hilbertiano. Como consecuencia, y esto es lo más interesante, *la completación de un espacio pre-hilbertiano es un espacio de Hilbert.* Podríamos ver sin dificultad la forma de extender por continuidad el producto escalar del espacio a la completación, pero no merece la pena hacer ese esfuerzo, la igualdad del paralelogramo se encarga de hacerlo por nosotros y, si queremos conocer explícitamente el producto escalar en la completación, siempre tenemos las identidades de polarización.

En segundo lugar, para saber si dos vectores x e y de un espacio normado verifican la igualdad del paralelogramo, basta conocer la norma en el espacio vectorial real que generan esos dos vectores. Podríamos decir que, saber si un espacio de Banach de dimensión arbitraria es o no un espacio de Hilbert, es una cuestión que podemos dilucidar en $\mathbb{R}^2$. Dicho con más propiedad: *un espacio normado X es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, lo son todos los subespacios bidimensionales de $X_{\mathbb{R}}$*. Incluso cuando X tiene dimensión 3 sobre $\mathbb{R}$ esta afirmación no es nada evidente y tiene una interesante interpretación geométrica.

Finalmente podemos fácilmente "auscultar" los espacios de Banach que conocemos, para decidir si son o no espacios de Hilbert. Ese es el contenido del próximo apartado.

10.3. Ejemplos de espacios de Hilbert

Espacios de dimensión finita. Para $N > 1$ y $1 \leqslant p < \infty$, usamos en l_p^N los dos primeros vectores básicos $e_1 = (1,0,\ldots,0)$ y $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$, observamos que $\|e_1 \pm e_2\|_p = 2^{1/p}$ y deducimos que sólo se verifica la igualdad del paralelogramo cuando $p = 2$. Análogo razonamiento muestra que l_∞^N tampoco verifica la igualdad del paralelogramo. Recíprocamente, sabemos que la norma euclídea en $\mathbb{K}^N$ procede de un producto escalar. Por tanto:

Dados $N > 1$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l_p^N es un espacio de Hilbert si, y sólo si, $p = 2$.

Merece la pena comentar que para los espacios de Hilbert l_2^N, al igual que para todos los que van a aparecer, la Desigualdad de Cauchy-Schwartz no es más que la desigualdad de Hölder en el caso particular $p = 2$. Obviamente este comentario, como muchos de los que vamos a hacer en lo que sigue, es anti-histórico, la Desigualdad de Cauchy-Schwartz es anterior a la de Hölder.

Espacios de sucesiones. El mismo razonamiento del caso anterior se aplica a los espacios de sucesiones l_p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, usando los dos primeros vectores unidad, con lo que obtenemos:

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, el espacio de Banach l_p es un espacio de Hilbert si, y sólo si, $p = 2$.

De hecho, el razonamiento que usamos en el caso $p = \infty$ demuestra que c_0 no es un espacio de Hilbert, mucho menos podrán serlo c y l_∞.

Claramente, el producto escalar de l_2 viene dado por:

$$(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} \quad (x, y \in l_2)$$

Tenemos aquí el ejemplo más importante de espacio de Hilbert de dimensión infinita.

Espacios de funciones integrables. Dado un conjunto medible $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, con medida de Lebesgue positiva, siempre se pueden encontrar dos subconjuntos disjuntos de Ω que tengan medida positiva y finita. Las funciones características de estos conjuntos están en $L_p(\Omega)$ para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y pueden hacer el papel que los vectores unidad han hecho en razonamientos anteriores. Obtenemos lo siguiente:

Para cualquier conjunto medible con medida positiva $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, el espacio de Banach $L_p(\Omega)$ es un espacio de Hilbert si, y sólo si, $p = 2$.

El producto escalar en $L_2(\Omega)$ es fácil de adivinar:

$$(f|g) = \int_\Omega f(t)\overline{g(t)}\,dt \qquad (f, g \in L_2(\Omega))$$

Finalmente, es fácil comprobar que otros espacios de Banach conocidos no verifican la igualdad del paralelogramo. Por ejemplo, si L es un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, que no se reduzca a un punto, el espacio de Banach $C_0(L)$ de las funciones continuas en L que se anulan en el infinito, con la norma del máximo, nunca es un espacio de Hilbert.

10.4. Teorema de la Proyección Ortogonal

Los espacios de Hilbert tienen un comportamiento muy especial en relación con la Teoría de Aproximación. Todo subconjunto convexo y cerrado, no sólo es un conjunto proximinal en el espacio, sino que incluso cada punto del espacio tiene una única mejor aproximación en dicho subconjunto. Esta importante propiedad geométrica de los espacios de Hilbert será la clave para el desarrollo posterior de la teoría.

Lema de Aproximación Óptima. *Sea C un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces, para cada $x \in X$ existe un único punto $P_C(x) \in C$ que materializa la distancia de x a C, esto es, que verifica:*

$$\|x - P_C(x)\| = d(x,C) = \operatorname{ínf}\{\|x-y\| : y \in C\}$$

Demostración. Es una consecuencia bastante fácil de la igualdad del paralelogramo. Fijado $x \in H$, para cualesquiera $u, v \in C$ podemos escribir:

$$\|u-v\|^2 = \|(u-x)-(v-x)\|^2 = 2\|u-x\|^2 + 2\|v-x\|^2 - \|u+v-2x\|^2$$

Puesto que $(u+v)/2 \in C$ por ser C convexo, tenemos

$$\|u+v-2x\|^2 = 4\left\|\frac{u+v}{2} - x\right\|^2 \geqslant 4\,d(x,C)^2$$

y sustituyendo esta desigualdad en la igualdad anterior obtenemos:

$$\|u-v\|^2 \leqslant 2\|u-x\|^2 + 2\|v-x\|^2 - 4\,d(x,C)^2 \qquad (x \in X,\, u,v \in C) \tag{$\dagger$}$$

Esto prueba ya la unicidad del punto de C que pueda materializar la distancia a x, ya que si $u, v \in C$ verifican que $\|u-x\| = \|v-x\| = d(x,C)$, la desigualdad anterior implica que $u = v$.

Casi con el mismo argumento, probamos la existencia. Para ello, sea $\{u_n\}$ una sucesión de puntos de C tal que $\{\|u_n - x\|\} \to d(x,C)$. Fijado un $\varepsilon > 0$, existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando:

$$\|u_n - x\|^2 < d(x,C)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad (n \in \mathbb{N},\, n \geqslant n_0)$$

Pero entonces, para $n, m \geqslant n_0$, tomando $u = u_n$ y $v = u_m$ en $(\dagger)$, obtenemos:

$$\|u_n - u_m\|^2 < 4\left(d(x,C)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) - 4\,d(x,C)^2 = \varepsilon^2$$

lo que demuestra que $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Por ser H completo y C cerrado, dicha sucesión converge a un punto $P_C(x) \in C$ que verifica $\|x - P_C(x)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x - u_n\| = d(x,C)$. Así pues, $P_C(x)$ es un punto de C que materializa la distancia a x y la unicidad estaba asegurada de antemano. ■

Nos interesa aplicar el resultado anterior al caso particular de un subespacio. Sea pues M un subespacio cerrado de nuestro espacio de Hilbert H, fijemos $x \in H$ y sea $P_M(x)$ el único punto de M que materializa la distancia a x. Vamos a comprobar que $P_M(x)$ se caracteriza por verificar que $(x - P_M(x)|y) = 0$ para todo $y \in M$. Con la terminología que introduciremos enseguida, esta condición tiene una interpretación geométrica muy clara: $x - P_M(x)$ es ortogonal a M, o dicho de forma más sugestiva, $P_M(x)$ es el pie de la perpendicular a M que pasa por x. Comprobemos pues esta caracterización.

Dado $u \in M$, por definición de $P_M(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\|x - P_M(x)\|^2 \leqslant \|x - u\|^2 &= \big\| \big(x - P_M(x)\big) - \big(u - P_M(x)\big) \big\|^2 \\ &= \|x - P_M(x)\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\big(x - P_M(x)\big|u - P_M(x)\big) + \|u - P_M(x)\|^2\end{aligned}$$

de donde deducimos

$$2\,\mathrm{Re}\,\big(x - P_M(x)\big|u - P_M(x)\big) \leqslant \|u - P_M(x)\|^2, \quad \forall u \in M$$

Fijados $v \in M$ y $t \in \mathbb{R}^+$, podemos ahora tomar $u = P_M(x) + tv \in M$, obteniendo

$$2t\,\mathrm{Re}\,\big(x - P_M(x)\big|v\big) \leqslant t^2\,\|v\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \forall v \in M$$

Dividiendo por t ambos miembros de la desigualdad anterior y haciendo $t \to 0$ obtenemos

$$\mathrm{Re}\,\big(x - P_M(x)\big|v\big) \leqslant 0 \quad \forall v \in M$$

Finalmente, fijado $y \in M$ podemos tomar $v = y$, pero también $v = -y$, con lo que obtenemos

$$\mathrm{Re}\,\big(x - P_M(x)\big|y\big) = 0 \quad \forall y \in M$$

concluyendo nuestro argumento en el caso real. En el caso complejo, para que se anule el producto escalar, y no sólo su parte real, tomaremos también $v = \pm iy$. En cualquier caso tenemos, como se quería,

$$\big(x - P_M(x)\big|y\big) = 0 \quad \forall y \in M \qquad \diamondsuit$$

Recíprocamente, si $y_0 \in M$ verifica que $(x - y_0|y) = 0$ para todo $y \in M$, entonces:

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|(x - y_0) - (y - y_0)\|^2 = \|x - y_0\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(x - y_0|y - y_0) + \|y - y_0\|^2 \\ &= \|x - y_0\|^2 + \|y - y_0\|^2 \geqslant \|x - y_0\|^2 \qquad (y \in M)\end{aligned}$$

lo que demuestra que y_0 materializa la distancia de x a M, es decir, $y_0 = P_M(x)$. Queda pues comprobado que, para todo $x \in X$, la única mejor aproximación $P_M(x)$ se caracteriza por la condición $\diamondsuit$, de la que vamos a sacar mucho partido, tan pronto como preparemos una terminología adecuada.

Se dice que dos vectores x e y de un espacio pre-hilbertiano X son **ortogonales** cuando $(x|y) = 0$, en cuyo caso escribimos $x \perp y$. Obsérvese que se verifica el *Teorema de Pitágoras*, es decir,

$$x \perp y \quad \Rightarrow \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

e incluso, en el caso real, es cierto el recíproco. De hecho, en un espacio pre-hilbertiano real, para cualesquiera vectores no nulos x e y, la Desigualdad de Cauchy-Schwartz nos dice que

$$-1 \leqslant \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|} \leqslant 1$$

lo que permite definir el ángulo entre los vectores x e y como el único $\theta \in [0,\pi]$ que verifica

$$\cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}$$

y es claro que $\theta = \pi/2$ cuando $x \perp y$. Dado un subconjunto no vacío Y de un espacio prehilbertiano X, podemos considerar el conjunto de los vectores ortogonales a todos los de Y, es decir, el conjunto:

$$Y^{\perp} = \{x \in X : x \perp y \ \ \forall\, y \in Y\}$$

De las propiedades del producto escalar se deduce claramente que $Y^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X, y es evidente que $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$.

Pues bien, volvamos a los razonamientos anteriores sobre la mejor aproximación en un subespacio. Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, sabemos que cada $x \in H$ tiene una única mejor aproximación $P_M(x) \in M$ y también que $P_M(x)$ queda caracterizado por la condición $\diamondsuit$, que ahora se expresa simplemente diciendo que $x - P_M(x) \in M^{\perp}$. Tenemos entonces $x = P_M(x) + x - P_M(x) \in M + M^{\perp}$, de la arbitrariedad de x deducimos $H = M + M^{\perp}$ y es claro que esta suma es directa, ya que si $x \in M \cap M^{\perp}$ se tendrá $(x|x) = 0$ luego $x = 0$. Por tanto $H = M \oplus M^{\perp}$ y vemos enseguida que esta suma es topológico-directa. En efecto, P_M ha resultado ser la proyección lineal en H que verifica $P_M(H) = M$ y $\ker P_M = M^{\perp}$. Se dice que P_M es la **proyección ortogonal** de H sobre M. Es claro que P_M es continua, pues para cada $x \in H$, usando que $(x - P_M(x)) \perp P_M(x)$ tenemos:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$$

luego $\|P_M(x)\| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in H$ y P_M es continua con $\|P_M\| \leqslant 1$. De hecho, es claro que $\|P_M\| = 1$ a menos que $M = \{0\}$, pero la igualdad anterior encierra mucha más información, ya que nos permite recuperar la norma de H, y no sólo su topología, a partir de las normas de M y $M^{\perp}$. Así pues, tenemos una perfecta descomposición del espacio H como suma directa de los subespacios M y $M^{\perp}$. Obsérvese también que la situación es simétrica, se comprueba fácilmente que $M^{\perp\perp} = M$ así como que, para cada $x \in H$, $x - P_M(x)$ es la mejor aproximación de x en $M^{\perp}$, simbólicamente, $x - P_M(x) = P_{M^{\perp}}(x)$ o $P_{M^{\perp}} = \mathrm{Id}_H - P_M$. Enunciamos con detalle toda la información obtenida:

Teorema de la Proyección Ortogonal. *Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H. Entonces:*

- (i) *H se descompone en la forma: $H = M \oplus M^{\perp}$.*
- (ii) *La proyección lineal de H sobre M tal que $\ker P_M = M^{\perp}$ es la proyección ortogonal P_M de H sobre M, que se caracteriza por el hecho de que, para cada $x \in H$, $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M.*
- (iii) *Además, P_M verifica que $\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$ para todo $x \in H$. En particular P_M es continua, luego H es suma topológico-directa de M con $M^{\perp}$, y $\|P_M\| = 1$ a menos que $M = \{0\}$.*
- (iv) *Finalmente, se tiene también $M^{\perp\perp} = M$ y $P_{M^{\perp}} = \mathrm{Id}_H - P_M$.*

Hay una información en el teorema anterior que merece destacarse. Recordemos que, en un espacio de Banach, un subespacio cerrado está complementado si, y sólo si, admite un complemento algebraico cerrado, cosa que no siempre ocurre. Sin embargo, en espacios de Hilbert el teorema anterior nos dice que siempre existe ese complemento topológico:

Corolario. *En un espacio de Hilbert, todo subespacio cerrado está complementado.*

Como otra consecuencia importante del Teorema de la Proyección Ortogonal, vamos ahora a describir perfectamente el dual de un espacio de Hilbert, concluyendo que se puede identificar con el propio espacio. Si H es un espacio de Hilbert, cada vector $y \in H$ da lugar a un funcional lineal $\hat{y}$ definido en H por

$$\hat{y}(x) = (x|y) \qquad (x \in H)$$

En el caso complejo, nótese que es importante situar el vector y en la segunda variable para aprovechar la linealidad del producto escalar en la primera. La desigualdad de Cauchy-Schwartz nos dice que $\hat{y} \in H^*$ con $\|\hat{y}\| \leqslant \|y\|$, pero la desigualdad contraria es inmediata, basta ver que $\|y\|^2 = \hat{y}(y) \leqslant \|\hat{y}\|\,\|y\|$. Por tanto, tenemos una aplicación $y \mapsto \hat{y}$ de H en H^* que es conjugado-lineal (el precio que pagamos por haber tenido que situar el vector y en la segunda variable) e isométrica. La clave está en que esta aplicación también es sobreyectiva y se convierte en una identificación de H con su dual H^*:

Corolario (Teorema de Riesz-Fréchet). *Si H es un espacio de Hilbert y f es un funcional lineal continuo en H, existe un vector $y \in H$ tal que $f(x) = (x|y)$ para todo $x \in H$. Por tanto, escribiendo:*

$$\hat{y}(x) = (x|y) \qquad (x, y \in H)$$

la aplicación $y \mapsto \hat{y}$ es una biyección conjugado-lineal isométrica de H sobre su dual H^*.

En efecto, dado $f \in H^*$, podemos aplicar el Teorema de la Proyección Ortogonal a $\ker f$, que es un subespacio cerrado de H. Suponiendo, sin perder generalidad, que $f \neq 0$, deberá existir $u \in (\ker f)^{\perp}$ con $u \neq 0$ y, puesto que $f(u) \neq 0$, podemos conseguir mediante una obvia normalización que $f(u) = 1$. Entonces, para cualquier $x \in X$, usando que $x - f(x)u \in \ker f$, obtenemos

$$0 = \big(x - f(x)\,u \,\big|\, u\big) = \big(x \,\big|\, u\big) - f(x)\,\|u\|^2$$

Tomando entonces $y = u\,\|u\|^{-2}$ tenemos

$$f(x) = \frac{1}{\|u\|^2}\big(x \,\big|\, u\big) = \big(x \,\big|\, y\big)$$

y, en vista de la arbitrariedad de $x \in X$, hemos probado que $f = \hat{y}$, como se quería.

Así pues, todo espacio de Hilbert real H es isométricamente isomorfo a su espacio dual, podemos escribir $H \equiv H^*$. En el caso complejo, la identificación conseguida no es lineal sino conjugado-lineal. Se puede conseguir también en caso complejo un isomorfismo isométrico y escribir $H \equiv H^*$, pero la identificación dada por el corolario anterior es canónica, está definida directamente a partir del producto escalar sin usar ningún tipo de sistema de referencia, mientras que para conseguir un isomorfismo isométrico sí es necesario fijar un tal sistema.

A partir del corolario anterior es fácil probar una interesante consecuencia: *todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach reflexivo.*