



## Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2021-2022)

Responsable de tutorización: Julio Becerra Guerrero

Departamento: Análisis Matemático

Área de conocimiento: Análisis Matemático

Título del trabajo: Extensión de Isometrías, Problema de Tingley.

Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):

Complementario de profundización

Divulgación de las Matemáticas

Docencia e innovación

Herramientas informáticas

Iniciación a la investigación

Materias del grado relacionadas con el trabajo: Análisis Funcional y Análisis Matemático II

Descripción y resumen de contenidos:

Comenzamos recordando el clásico teorema de Mazur-Ulam, según el cual toda isometría sobreyectiva  $A: X \rightarrow Y$  es afín. Por cuerpo convexo de un espacio normado  $X$  nos referimos a un subconjunto convexo cerrado de  $X$  con interior no vacío en  $X$ . En 1972, Mankiewicz [Mank1972] demostró que toda isometría sobreyectiva entre cuerpos convexos de espacios normados arbitrarios puede extenderse de manera única a una función afín entre los espacios. Motivado por esta observación, Tingley [Ting1987] planteó el siguiente problema de extensión:

**Problema:** Supongamos que  $A: S(X) \rightarrow S(Y)$  es una isometría sobreyectiva. ¿Es  $A$  necesariamente la restricción de una isometría real-lineal de  $X$  a  $Y$ ?

Este problema se ha abordado en numerosos trabajos en los que se ha dado una respuesta afirmativa en casos particulares de ciertos espacios de Banach  $X$  e  $Y$  (ver [Pe2018]).

Diremos que un espacio de Banach  $X$  satisface la **propiedad de Mazur-Ulam** si, para cualquier espacio de Banach  $Y$ , cada isometría sobreyectiva  $\Delta: S(X) \rightarrow S(Y)$  admite una extensión a una isometría real-lineal sobreyectiva de  $X$  a  $Y$ . El artículo pionero que trata esta propiedad se debe a Ding [Ding07], quien demuestra que el espacio  $c_0$  de todas las sucesiones de números reales que convergen a cero satisface la propiedad de Mazur-Ulam. Más recientemente, se ha demostrado que esta propiedad la satisfacen:

i) Las  $C^*$ -álgebras con unidad y las álgebras reales de von Neumann [MoriOza2018].

ii) Los  $JBW^*$ -triples con rango uno o rango mayor o igual a tres [BeCuFePe].

Comentar que dicho problema permanece abierto incluso si los espacios de Banach  $X$  e  $Y$  son bidimensionales. V. Kadet, y M. Martín demuestran en [KadMar2012] que todo espacio polihedral de dimensión finita tiene la propiedad de Mazur-Ulam. Más recientemente J. Cabello prueba que todo espacio normado de dimensión dos que no sea estrictamente convexo, satisface la propiedad de Mazur-Ulam [Ca-Sa].

Los objetivos que nos planteamos son los siguientes:

- 1) ¿Se puede renormar equivalentemente todo espacio de Banach para que satisfaga la propiedad de Mazur-Ulam?

2) ¿Tiene todo espacio de Banach estrictamente convexo la propiedad de Mazur-Ulam?

*Actividades a desarrollar:*

Realizar una recopilación histórica donde se aborden todos los autores que han trabajado en los temas propuestos así como sus aportaciones. Intentar dar respuesta a las cuestiones planteadas.

*Objetivos matemáticos planteados*

Recopilación histórica de los resultados fundamentales y demostración de los mismos.

Avanzar en la medida de lo posible en la resolución de las cuestiones anteriormente planteadas.

*Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:*

- [BeCuFePe] J. Becerra Guerrero, M. Cueto-Avellaneda, F.J. Fernández-Polo and A.M. Peralta, On the extension of isometries between the unit spheres of a JBW\*-triple and a Banach space, por aparecer en *J. Inst. Math. Jussieu*. arXiv: 1808.01460
- [Ding07] G.G. Ding, The isometric extension of the into mapping from a  $L^\infty(\Gamma)$ -type space to some Banach space, *Illinois J. Math.* **51** (2) (2007), 445-453.
- [KadMar2012] V. Kadets and M. Martín, Extension of isometries between unit spheres of infinite-dimensional polyhedral Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012), 441-447.
- [MoriOza2018] M. Mori and N. Ozawa, Mankiewicz's theorem and the Mazur-Ulam property for  $C^*$ -algebras, por aparecer en *Studia Math.* arXiv:1804.10674.
- [Pe2018] A.M. Peralta, A survey on Tingley's problem for operator algebras, *Acta Sci. Math.* **84** (2018), 81-123.
- [Ting1987] D. Tingley, Isometries of the unit sphere, *Geom. Dedicata* **22** (1987), 371-378.

Firma del responsable de tutorización



En, Granada, a 9 de Mayo de 2021