

NOTAS DOCENTES

ANÁLISIS FUNCIONAL

DOBLE GRADO I. INFORM. y MATEMÁTICAS

Cursos 2021/22, 2022/23

A handwritten signature in red ink, appearing to be 'Antonio Cañada Viller', written in a cursive style.

Antonio Cañada Viller

Alviod

ÍNDICE

| | |
|---|-----|
| Espacios vectoriales de dimensión infinita | 3 |
| Espacios normados. Ejemplos | 15 |
| Topología de espacios normados | 25 |
| Operadores lineales | 44 |
| Teorema de Hahn-Banach | 58 |
| Espacios de Hilbert (en primer encuentro) | 68 |
| Igualdad del Paralelogramo | 76 |
| Teorema de la Proyección ortogonal Dual de un espacio de Hilbert | 82 |
| Lema de Baire. Aplicaciones | 102 |
| Bibliografía | 107 |

NOTA IMPORTANTE: Estas "notas docentes" no deben ser consideradas como unos apuntes de la asignatura. Son, simplemente, las que he usado en clase. Considero que pueden ser útiles para los estudiantes, debido a su brevedad, aunque considero que las ideas fundamentales están presentes.

A. Cárdenas E. VECTORIALES DE DIMENSIÓN INFINITA Septiembre 2022

1. ¿Qué significa que un espacio vectorial tenga dimensión n ?
2. Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, ¿existen espacios vectoriales de dimensión n ?
3. ¿Qué significa que un espacio vectorial tenga dimensión infinita?
4. ¿Existen espacios vectoriales de dimensión infinita?
5. ¿Cuál es el concepto de base de un e.v.?
6. ¿Qué relación tiene el concepto de base con la dimensión de un e.v.?
7. Dado un espacio vectorial, ¿existe siempre alguna base?
8. Dados 2 e.v. sobre un mismo cuerpo K (en adelante suponemos que $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$), V y W , decimos que V y W son isomorfos si existe alguna aplicación $T: V \rightarrow W$, T biyectiva y lineal.
Si la dimensión de $V(K)$ es n , es trivial probar que V es isomorfo a K^n . Ahora bien, el tema se puede complicar si hablamos de dimensiones infinitas, ya que "no todos los infinitos son iguales" (éste es un tema muy bonito, del que hablaremos en otra ocasión).
Por ejemplo, si $\mathcal{X}_0 = \text{Car}(\mathbb{N})$, $\mathcal{X}_1 = \text{Car}(\mathbb{R})$, entonces
$$\mathcal{X}_0 < \mathcal{X}_1$$

Por cierto, ¿sabes la respuesta a la siguiente cuestión?

(Q) ¿ $\exists A: \mathbb{N} \subset A \subset \mathbb{R}, \aleph_0 < \text{card}(A) < \aleph_1$?

¡Quizás te lleves una buena sorpresa investigando la respuesta!

Ejercicio 1. (A) Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión finita y

$L: V \rightarrow V$, lineal. Entonces son equivalentes:

- L es inyectiva.
- L es sobreyectiva.
- L es biyectiva.

(B) Sea $L: (C[0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow (C[0,1], \mathbb{R})$,
 $(Lf)(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad \forall f \in (C[0,1], \mathbb{R})$
 $\forall t \in [0,1]$

¡Prueba que L es inyectiva, pero no sobreyectiva!

¡Quiero que obtengas tus propias conclusiones!

9. Conectamos con la observación 7.

Se puede demostrar, con la ayuda del LEMA DE ZORN, que todo espacio vectorial admite alguna base. Evidentemente, estamos hablando de BASE ALGEBRAICA o

BASE DE HAMEL. Pero la casuística puede sorprender, como podemos ver con los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1. $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, conjunto de los polinomios reales. Es claro que V es un e.v. real ^{con las operaciones habit.} y que una base de V es $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$

Así pues, V es un e.v. real, de dimensión infinita, con base numerable.

EJEMPLO 2. $V = C([0,1], \mathbb{R})$, conjunto de funciones continuas, definidas en $[0,1]$ y con valores reales.

Es claro que V es un e.v. real ^{con las operaciones habit.}, pero demostraremos este

curso, con ayuda del TEOREMA DE LA CATEGORÍA DE BAIER,

que cualquier base de V es no numerable (¡que

barbaridad!). Así si $B = \{v_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ es cualquier

base de V , Λ es infinito no numerable, o sea que

olvidaros de poder escribir $\Lambda = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$, ya

que si fuese así, Λ sería numerable.

EJEMPLO 3. $V = \mathbb{R}^\infty$, conjunto de las sucesiones de n°

reales, $\mathbb{R}^\infty = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) : \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$

Es claro que V es un e.v. real con las operaciones

usuales. ¿Cómo podemos probar que la dimensión

de \mathbb{R}^∞ es infinita? Algunos dirán: encontrando

alguna base infinita. ¡Intentadlo, y que haga

suerte! Yo prefiero el camino siguiente: el conjunto

$e_1 = (1, 0, 0, \dots)$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

\vdots

$$e_n = (0, \dots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N}$$

es un conjunto linealmente independiente. Esto prueba que $\dim V$ es infinita (¿Por qué?)
¿Es el conjunto anterior una base de V ? Evidentemente (¿?) NO.

¡Reflexiona un poco y verás que lo realizado en este ejemplo nos indica un camino para probar que un e.v. tiene dimensión infinita, sin necesidad de encontrar una base. (¿Serías capaz de materializar esta idea?)

EJEMPLO 4. $V = \mathbb{R}(\mathbb{Q})$: conjunto de los números racionales, como e.v. sobre el cuerpo \mathbb{Q} , con las operaciones usuales.

Si $H = \{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ es cualquier subconjunto de V , linealmente independiente, el conjunto de las combinaciones lineales de H es numerable (ya que \mathbb{Q} es numerable).

Como \mathbb{R} no es numerable (hecho probado por Cantor alrededor de 1871), obtenemos una conder

dicen: Cualquier base de $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ es no numerable.

Por cierto, atrevete a dar ejemplos de subconjuntos como H (l. indep. e infinitos) en $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$.

10. En e.v., con un producto escalar y dimensión infinita, introduciremos un concepto de base, diferente del de base algebraica o base de Hamel: el concepto de **BASE HILBERTIANA** (las BASES DE FOURIER son un buen ejemplo de ello).

11. El alumno puede practicar con los conceptos anteriormente con los dos grupos de ejemplos que siguen, que tratan con **ESPACIOS DE SUCESSIONES Y ESPACIOS DE FUNCIONES**, todos ellos e.v. de dimensión infinita, que aparecerán a menudo a lo largo del curso.

11.1 $\forall p \in [1, +\infty)$ definimos

$$l_p = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}$$

Tomamos sucesiones de elementos de K , $K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$

¿Es l_p un espacio vectorial sobre K , respecto de la

suma usual de sucesiones y el producto usual de un elemento de K por una sucesión? ¿Cumplirá la única

propiedad de espacio vectorial no evidente sea la que nos dice que la suma de 2 elementos de l_p está en l_p .

Esto no es difícil: $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos

$$|a_n + b_n|^p \leq (|a_n| + |b_n|)^p \leq (\max\{|a_n|, |b_n|\} + \max\{|a_n|, |b_n|\})^p$$

$$= 2^p (\max\{|a_n|, |b_n|\})^p \leq 2^p (|a_n|^p + |b_n|^p)$$

Por tanto, si $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p < +\infty$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p < +\infty.$$

NOTA: si $1 < p < q < +\infty$, entonces $l_1 \subset l_p \subset l_q$ Ejercicio

11.2 se define $l_\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$

(Recordemos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada $\Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \in \mathbb{R}$)

(a veces se escribe $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty$)

Aquí $|a_n|$ significa módulo del n.º complejo a_n (valor absoluto si a_n es real).

Trivialmente l_∞ es un e.v. sobre \mathbb{K} y $l_p \subset l_\infty$, $\forall p \geq 1$ Ejercicio
 (Cuidado con las palabras "trivialmente", "evidentemente" o similares; son muy peligrosas en matemáticas)

11.3. Otros ejemplos de e.v. son

C_{00} : sucesiones "casi nulas" ($(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_{00} \Leftrightarrow$ todos sus términos, salvo un n.º finito, son nulos)

C_0 : sucesiones con límite cero

c : sucesiones convergentes

Ejercicio

Trivialmente: $C_0 \subset C_0 \subset C \subset L_\infty$, $C_0 \subset L_0 \subset C_0 \subset L_0$

11.4 Si $1 \leq p < \infty$ y $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, definimos

$$L^p(a,b) = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}: x \text{ es medible, } \int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

donde, desde ahora, todas las integrales que aparezcan se entenderán en el sentido de Lebesgue.

Recordemos que si $x, y \in L^p(a,b)$, entonces

$x=y \Leftrightarrow x(t)=y(t)$, c.p.d. en $[a,b]$ (en inglés $x(t)=y(t)$, a.e. en $[a,b]$) $\Leftrightarrow \exists A \subset [a,b]: \mu(A)=0, x(t)=y(t)$,

$\forall t \in [a,b] \setminus A$ (donde $\mu(A)$ es la medida de Lebesgue de A)

11.5 $L^\infty(a,b)$ se define como

$$L^\infty(a,b) = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, x \text{ medible, } \exists M > 0: |x(t)| \leq M, \text{ a.e. en } [a,b] \right\}$$

Recordemos que $L^p \subset L^\infty$, $\forall p \in [1, +\infty)$

Ejercicio 2. Consulta la bibliografía recomendada

(por ejemplo, el libro de Bretis) para establecer la relación

entre $L^p(a,b)$, $L^q(a,b)$, $L^\infty(a,b)$, $1 \leq p < q$

11.6 Si $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$C^m[a,b] = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}: x, x', \dots, x^{(m)} \in C[a,b] \right\}$$

donde $x^{(m)}$ indica la derivada de orden m de x

¡Por cierto, escríbelo de manera rigurosa C' Taibó!
Ejercicio

Para terminar, una foto de D. Hilbert y una frase muy significativa



"The infinite. No other question has ever moved so profoundly the spirit of man" (1921)

COMPLEMENTOS

1. Definición de espacio vectorial

V sobre un cuerpo K .

Dos operaciones

$$+ : V \times V \rightarrow V, (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, (\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$$

$\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in K$, se tiene:

① Asociativa para +

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

② \exists elemento neutro para +

$$\exists 0 \in V : x + 0 = x$$

③ \exists elemento opuesto para +

$$\forall x \in V, \exists -x \in V : x + (-x) = 0$$

④ Conmutativa para +

$$x + y = y + x$$

⑤ $1 \cdot x = x$ (1 elem. unidad de K)

⑥ Pseudoasociativa

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \beta) x$$

(7) Distributiva de los escalares

$$(\alpha + \beta) \cdot X = \alpha \cdot X + \beta \cdot X$$

(8) Distributiva de los vectores

$$\alpha \cdot (X + Y) = \alpha \cdot X + \alpha \cdot Y$$

2. CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

Dados dos conjuntos A, B , se dice que A y B poseen el mismo cardinal (o que son equivalentes en este ambiente) si \exists alguna aplicación biyectiva $f: A \rightarrow B$.

Si A y B son conjuntos finitos, entonces A y B son equivalentes si tienen el "mismo número de elementos". Así, "por convenio" si A y B son conjuntos infinitos equivalentes, decimos que A y B tienen el "mismo número de elementos".

Se denota $\aleph_0 = \text{Cardinal}(\mathbb{N}) = \text{Car}(\mathbb{N})$,

$\aleph_1 = \text{Car}(\mathbb{R})$, etc.

Decimos que $\text{Car}(A) < \text{Car}(B)$ si existe alguna aplicación inyectiva de A en B ,

pero ninguna biyectiva.

Para cualquier conjunto A , se tiene

$$\text{Car}(A) < \text{Car}(\mathcal{P}(A))$$

donde $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de "todos los subconjuntos de A " (conjunto de las partes de A)

LEMA DE ZORN

Sea A un conjunto "parcialmente ordenado"

(existe alguna relación de orden en A , \leq : reflexiva, antisimétrica, transitiva) i.e.

cualquier $B \subset A$, B "totalmente ordenado"

($\forall x, y \in B$, o $x \leq y$ o $y \leq x$), admite alguna cota superior ($\exists x_0 \in A / x \leq x_0, \forall x \in B$)

Entonces A tiene algún elemento maximal:

$\exists y \in A$: $\nexists x \in A$ cumpliendo $y < x$ ($\Leftrightarrow y \leq x$, $y \neq x$).

Lema de Zorn \Leftrightarrow Axioma de elección

3. Idea fundamental para el Ejercicio 1

$$\dim \ker L + \dim \text{Im} L = \dim V$$

EJERCICIO 1. B)

L es "trivialmente lineal"

$$\text{Si } L(f) = 0 \Rightarrow \int_0^t f(s) ds = 0, \forall t \in [0,1]$$

T.F.C.

$$\Rightarrow f(t) = 0, \forall t \in [0,1] \Rightarrow \ker L = \{0\}$$

$$(Lf)(0) = 0, \text{ } \forall f \in C[0,1] \setminus \{0\}$$

J. L. L. L.
Septiembre 2022

ESPACIOS NORMADOS. EJEMPLOS

~~Revisado~~

Sep. 2021

Sea \mathbb{X} un e.v. sobre K (\mathbb{R} ó \mathbb{C}). Una norma en \mathbb{X} (Banach, 1.922) es una aplicación

$\|\cdot\|: \mathbb{X} \rightarrow [0, +\infty)$, $x \mapsto \|x\|$, que satisface:

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{X}; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in K, \forall x \in \mathbb{X}$$

$$(N3) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{X} \text{ (desig. triangular)}$$

Un espacio vectorial se dice normado si está equipado con una norma $\|\cdot\|$. Se indica $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$.

En cualquier espacio normado se puede definir una distancia (o métrica), inducida por la norma:

$$d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow [0, +\infty), \quad (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|.$$

Las propiedades abstractas de una métrica fueron introducidas por Fréchet en su tesis doctoral de 1.906. Véase el final de este archivo. A continuación describimos algunos ejemplos significativos.

Ejemplo 1. \mathbb{R}^n (\mathbb{R}), $n \in \mathbb{N}$

$\forall p \in [1, +\infty)$, podemos definir

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Es claro que la única propiedad de la norma que no es evidente es la (N3), desigualdad triangular, que en este

caso está dada por la desigualdad de Minkowski.

caso particular es llamada desigualdad de MINKOWSKI.

Probaremos la misma escalonadamente mediante (P1), (P2), (P3):

(P1.) $\forall a, b \in [0, +\infty)$, $\forall p > 1, q > 1$, t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene

(Desig. de Young) $a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ (P1.1) (Trivial si $a=0$ ó $b=0$)

Lema previo: $\forall \alpha \in (0, 1)$, $\forall x \in [1, +\infty)$, se tiene

$$\alpha(x-1) + 1 \geq x^\alpha \quad (*)$$

Demostr. Si $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \alpha(x-1) + 1 - x^\alpha$, entonces

$$f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha(1 - x^{\alpha-1}) = \alpha\left(1 - \frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) \geq 0,$$

ya que $x^{1-\alpha} \geq 1$, $\forall x \geq 1$, $\forall \alpha \in (0, 1)$ ($x^{1-\alpha}$ es \uparrow en $[1, +\infty)$)

Así $f \uparrow$ en $[1, +\infty)$. Por tanto $f(x) \geq f(1) = 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$

y (*) está probado. Si ahora tomamos en (*) (suponemos $a > 0, b > 0$)

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad x = \frac{a}{b} \text{ si } a \geq b \quad \left(\alpha = \frac{1}{q}, \quad x = \frac{b}{a} \text{ si } a \leq b \right)$$

tenemos

$$\frac{1}{p} \left(\frac{a}{b} - 1 \right) + 1 \geq \left(\frac{a}{b} \right)^{1/p} \Rightarrow \frac{a-b}{pb} + 1 \geq a^{1/p} \cdot b^{-1/p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{p} + b \geq a^{1/p} b^{1-1/p} \Rightarrow \frac{a}{p} + b \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq a^{1/p} b^{1-1/p}$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, lo que prueba (P1.1)

(P.2.) Desigualdad de Hölder $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (ó \mathbb{C}^n), tenemos

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q} \quad (\text{D.H.})$$

donde, como anteriormente, $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(Desigualdad de Cauchy-Schwarz para $p = 2, q = 2$)

Demostración. Si $x = 0$ ó $y = 0$, la (D.H.) es evidente. Así pues, suponemos $x \neq 0, y \neq 0$ (Aquí $0 \in \mathbb{R}^n$).

Definamos $a_k = \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}, b_k = \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}, 1 \leq k \leq n$.

Entonces, por (P.1), tenemos $a_k^{1/p} b_k^{1/q} \leq \frac{a_k}{p} + \frac{b_k}{q}$

$$\frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \frac{|x_k|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{|y_k|^q}{q \|y\|_q^q}$$

$$\text{Así, } |x_k| |y_k| \leq \frac{|x_k|^p}{p} \|x\|_p^{1-p} \|y\|_q + \frac{|y_k|^q}{q} \|y\|_q^{1-q} \|x\|_p$$

Sumando ahora, desde 1 a n , tenemos:

$$\sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \frac{1}{p} \|x\|_p^p \|x\|_p^{1-p} \|y\|_q + \frac{1}{q} \|y\|_q^q \|y\|_q^{1-q} \|x\|_p$$

$$= \frac{1}{p} \|x\|_p \|y\|_q + \frac{1}{q} \|x\|_p \|y\|_q =$$

$$= \|x\|_p \|y\|_q \quad \text{c.q.d. (D.H.)}$$

P.3 Con la ayuda de (D.H.), deducimos la desigualdad triangular o desigualdad de Minkowski para $\|\cdot\|_p$.

En efecto, sean $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Entonces:

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n (|x_k + y_k|^{p-1}) (|x_k + y_k|) =$$

$$= \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq (D.H.)$$

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Leftrightarrow p = q(p-1)$, tenemos

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &\leq \|x\|_p (\|x+y\|_p^p)^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p (\|x+y\|_p^p)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{p/q} \quad (**) \end{aligned}$$

Si $\|x+y\|_p = 0$, la desigualdad triangular es trivial.

Finalmente, si $\|x+y\|_p \neq 0$ (o lo que es lo mismo, $x \neq -y$)

de (**), tenemos:

$$\|x+y\|_p^{p - \frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Pero $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{p}{q} = p \Leftrightarrow 1 = p - \frac{p}{q}$, lo

que prueba la desigualdad triangular.

Uf, al fin hemos probado la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < +\infty$. Por cierto, la palabra Uf, según la R.A.E. es una "voz onomatopéica" que significa cansancio, fastidio o sofocación. ¡seguro que más de uno ha tenido estas sentencias! Pero no hay más

remedio. Las desigualdades dan muy bonitas, pero, en general, difíciles de probar. Leí alguna vez en algún sitio: "Las leyes de la Naturaleza se expresan con ecuaciones. Las ecuaciones dan un accidente"
Me gustó.

Estábamos con ejemplos de espacios normados y este ha sido el primero. Creo que los que siguen son "más alegres".

Ejemplo 2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, donde $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n)$,
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

Es trivial probar las propiedades de una norma.

Ejemplo 3. $\mathbb{X} = C([a, b], \mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_\infty$, donde
$$\forall x \in C([a, b], \mathbb{R}), \|x\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$$

Cuestión: ¿Por qué existe el máximo anterior?

En \mathbb{X} podemos definir otras normas. De hecho, para cada $p, 1 \leq p < +\infty$

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

es una norma en \mathbb{X} .

Ejemplo 4. $\mathbb{X} = C^m([a, b], \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$ fijo
Aquí podemos definir "muchas normas":

$$\|x\|_{\infty} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|; \quad \|x\|_{1,\infty} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|,$$

$$\dots \quad \|x\|_{m,\infty} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \dots + \max_{t \in [a,b]} |x^{(m)}(t)|,$$

También si $1 \leq p < +\infty$,

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \text{ etc.}$$

El hecho de elegir una norma u otra depende de la situación que estemos tratando, como veremos a lo largo del curso.

Ejemplo 5. "Espacios de sucesiones"

Recordemos que si $1 \leq p < +\infty$,

$$l_p = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}$$

Una norma "natural" para l_p es

$$\| (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

También,

$$l_{\infty} = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada} \right\}$$

y una norma "natural" es

$$\| (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

Las demostraciones para ver que tanto $\|\cdot\|_p$,

...

$1 \leq p < +\infty$, como $\|\cdot\|_\infty$, dan una norma en los respectivos espacios de sucesiones, son similares al caso \mathbb{R}^n (Ejemplos 1 y 2 anteriores), teniendo la precaución de mostrar primero la "versión de sumas finitas" y luego hacer un paso al límite (no hay problema, pues las series consideradas son convergentes). ¡Intentalo!

Ejemplo 6. "Espacios de Lebesgue de funciones integrables"
 si $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(a,b) = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}: x \text{ es medible, } \int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

$$L^\infty(a,b) = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}: x \text{ medible, } \exists M > 0: |x(t)| \leq M, a.e. [a,b] \right\}$$

$$\text{con } \|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty, \forall x \in L^p(a,b)$$

$$\|x\|_\infty = \inf \left\{ M: |x(t)| \leq M, a.e. \text{ en } [a,b] \right\}, \forall x \in L^\infty(a,b)$$

(este último también llamado supremo esencial de x y notado como $\text{supess } |x(t)|$ ó $\text{ess sup } |x(t)|$)

La demostración de que las definiciones anteriores constituyen auténticas normas, no es trivial, si $1 \leq p < +\infty$ y se puede consultar para ello la bibliografía recomendada. Básicamente, para el caso $1 \leq p < +\infty$

de parte de la desigualdad de Young para obtener la "correspondiente" desigualdad de Hölder, y de aquí, la desigualdad de Minkowski (triangular).

Para terminar, una foto de S. Banach (1892-1945)



Banach fue el fundador del Análisis Funcional

y otro de H. Minkowski (1864-1909)



"El espacio y el tiempo, por sí mismos, se han desvanecido y solo existe una especie de mezcla de los dos"

~~Alcántara~~
Septiembre 2021

COMPLEMENTOS

1. **Espacios métricos.** Sea \bar{X} un conjunto. Una métrica en \bar{X} es una aplicación $d: \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow [0, \infty)$ que satisficiera:

a) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\forall x, y \in \bar{X}$

b) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \bar{X}$

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in \bar{X}$
(Desigualdad triangular)

2. Sea \bar{X} un espacio vectorial sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}). Demuestra que en \bar{X} se puede definir una norma.

3. Sea \bar{X} un espacio normado y (x_n) una sucesión en \bar{X} convergente. Prueba que las sucesiones

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n}{n^2}$$

son convergentes y encuentran su límite.

④ Des. Young, Hölder y Minkowski para funciones.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con medida positiva (p.ejemplo, cualquier abierto no vacío y acotado). Recordemos que si $1 \leq p < \infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{medible, } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

Hölder: $p, q > 1 / \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega) \text{ y}$$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Minkowski: es la desigualdad triangular
para $\|\cdot\|_p$ en $L^p(\Omega)$.

~~J. Rodríguez~~

Septiembre 2021

TOPOLOGÍA DE ESPACIOS NORMADOS

Alf-aly
October 2021

Si $(\bar{X}, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, entonces en \bar{X} se puede definir una métrica

$$d: \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow d(x, y) = \|x - y\|.$$

Por tanto cualquier espacio normado es espacio métrico y consecuentemente, espacio topológico.

Eso nos permite hablar de: bolas abiertas, bolas cerradas, subconjuntos abiertos, cerrados, interior, clausura, densidad, sucesiones y series convergentes, sucesiones de Cauchy, espacios completos, etc.

Repetir aquí todos estos conceptos nos "habría perdido el tiempo" y el alumno interesado puede consultar la bibliografía recomendada.

En esta nota vamos a concentrarnos en aquellos conceptos y propiedades "propios de la dimensión infinita" y las diferencias fundamentales con los espacios de dimensión finita (\mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n), con los que el alumno debe estar familiarizado.

Atención a las notas que siguen (en realidad son ejercicios)

- ① $(\bar{X}, \|\cdot\|) \Rightarrow (\bar{X}, d)$ métrico ($d(x, y) = \|x - y\|$)
- (\bar{X}, d) métrico \nRightarrow la métrica proviene de una norma

Ejemplo $d: \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

② Si $(\bar{X}, \|\cdot\|)$ es normado, las aplicaciones:

a) $\bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}, (x,y) \rightarrow x+y$

b) $K \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}, (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$

c) $\bar{X} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$

son continuas, cuando en $\bar{X} \times \bar{X}$ y $K \times \bar{X}$ se considera la topología producto.

Nota: En $\bar{X} \times \bar{X}$ podemos definir, por ejemplo, la norma: $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$

Entonces la bola abierta de centro $(a,b) \in \bar{X} \times \bar{X}$ y radio $r > 0$, en $\bar{X} \times \bar{X}$, satisface:

$$B_{\bar{X} \times \bar{X}}((a,b), r) = B_{\bar{X}}(a, r) \times B_{\bar{X}}(b, r)$$

Luego la topología de la norma $\|(\cdot, \cdot)\|$ en $\bar{X} \times \bar{X}$ es la topología producto en $\bar{X} \times \bar{X}$. Análogamente para $K \times \bar{X}$.

Problemas ya la continuidad de las aplicaciones anteriores:

a) Si $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$, entonces $x_n \rightarrow x$,

$y_n \rightarrow y$. Como $\|x_n + y_n - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| +$

$\|y_n - y\|$ tenemos que $(x_n + y_n) \rightarrow x + y$

b) "Es igual de sencillo". En efecto, si $(\lambda_n, x_n) \rightarrow (\lambda, x) \in K \times X$, entonces $(\lambda_n) \rightarrow \lambda$, $(x_n) \rightarrow x$. Como $(x_n) \rightarrow x$, la sucesión (x_n) está acotada: $\exists M > 0 / \|x_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$ (¿habías olvidado esto?)

Luego

$$\|\lambda x_n - \lambda x\| = \|\lambda x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x\| \leq |\lambda_n - \lambda| \|x_n\| +$$

$$+ |\lambda| \|x_n - x\| \leq |\lambda_n - \lambda| M + |\lambda| \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

c) La demostración de c) es trivial si usamos la desigualdad

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in X (*)$$

ya que si $x_n \rightarrow x$, entonces, por (*), $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$
 ¡Atrévete a probar *! Es fácil.

③ "Diferencia importante entre la dimensión finita e infinita"

Para que queden claras las "ideas fundamentales" vamos a "comparar" la convergencia de \mathbb{R}^2 con la de los \mathbb{R}^q (pero lo mismo ocurriría con \mathbb{R}^p y $\ell_q, 1 \leq q \leq +\infty$)

Sea (x^n) una sucesión de \mathbb{R}^2 , $x^n = (x_1^n, x_2^n), \forall n \in \mathbb{N}$
 y $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, si en \mathbb{R}^2 consideramos la norma $\|y\|_{\mathbb{R}^2} = \|(y_1, y_2)\|_{\mathbb{R}^2} = \max\{|y_1|, |y_2|\}$

de tiene:

$$x^n \xrightarrow{\mathbb{R}^2} x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1 \\ x_2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_2 \end{cases}$$

Esto es fácil de probar, pues:

$$(x^n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} x \Leftrightarrow \| (x^n - x) \|_{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\stackrel{\text{II}}{\Leftrightarrow} \max\{|x_1^n - x_1|, |x_2^n - x_2|\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\stackrel{\text{II}}{\Leftrightarrow} x_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1, \quad x_2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_2$$

Atención: - En \mathbb{R}^2 podemos considerar cualquier otra norma (¡si no recuerdas la causa, debes empezar a repasar algunos apuntes!)

- Podemos tratar con \mathbb{R}^p , $p \in \mathbb{N}$ y el resultado es el mismo (¿Por qué?)

Si (f^n) es una sucesión en \mathbb{R}^p :

$$f^1 = (f_1^1, f_2^1, \dots, f_p^1)$$

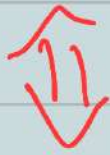
$$f^2 = (f_1^2, f_2^2, \dots, f_p^2)$$

$$f^n = (f_1^n, f_2^n, \dots, f_p^n)$$

entonces

$(f^n) \xrightarrow{\mathbb{R}^p}$

$$(f^n) \xrightarrow{\|\cdot\|} f = (f_1, \dots, f_p)$$



$$(f_i^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_i, \quad 1 \leq i \leq p$$

En resumen: "la convergencia en \mathbb{R}^p es equivalente a la convergencia por columnas".

Ahora observa el ejemplo siguiente en ℓ_∞ :

$$f^1 = (0, 1, 1, 1, \dots)$$

$$f^2 = (0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

$$f^3 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

.....

$$f^n = (0, \dots, \overset{(n)}{0}, 1, 1, 1, \dots)$$

.....

¿Evidentemente?, la sucesión (f^n) es una sucesión de elementos de ℓ_∞ que, por columnas converge al elemento

$$f = (0, 0, 0, \dots) \in \ell_\infty$$

pero $(f^n) \not\xrightarrow{\|\cdot\|} f$, pues $\|f^n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Puede probarse fácilmente que la convergencia en ℓ_p implica la convergencia por columnas,

pero que el recíproco no es cierto.

"Es posible que la causa de ello sea la dimensión infinita" ¿Estás de acuerdo? (Si no es así, repasa lo anterior hasta que te convenzas).

④ Espacios de Banach. Ejemplos importantes.

Un grupo especial de espacios normados lo constituyen los "espacios normados completos" (aquellos donde cualquier sucesión de Cauchy es convergente a un elemento del espacio normado considerado). El ejemplo más elemental es \mathbb{R}^n (con cualquier norma), \mathbb{C}^n , etc. (en general, cualquier espacio normado de dimensión finita). En dimensión infinita, quizás el tema sea más divertido,

ya que nos encontramos con espacios normados completos (llamados, en adelante,

ESPACIOS DE BANACH) y otros que no lo son, como muestran los ejemplos que siguen.

4.1 l_p , $1 \leq p < +\infty$, con la norma habitual, es un espacio de Banach.

Es el caso de l_1 , l_2 , l_∞ , etc.

Mevele la pena hacer la demostración,
puesto que se repasan conceptos importan-
tes sobre series convergentes. ¡Vamos a
ello!

Por simplicidad, vamos a demostrar que $(l_2, \|\cdot\|_2)$
es completo (ideas casi idénticas pueden usarse
en los otros casos). Recordemos

$$l_2 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\},$$

$$\| (x_n) \|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall (x_n) \in l_2.$$

Sea $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en l_2

Objetivo: Demostrar que $\exists x \in l_2 / x^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$
en l_2

En efecto, pensemos que $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una
"sucesión de sucesiones":

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, \dots)$$

$$x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots)$$

$$\dots$$
$$x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k, \dots)$$

(0)

Como (x^k) es de Cauchy en l_2 :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > k_0(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \|X^{k+p} - X^k\|_2 \leq \varepsilon$$

$$\text{Como } \|X^{k+p} - X^k\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{k+p} - x_n^k|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad (1)$$

esto implica:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left. \begin{array}{l} \forall k > k_0(\varepsilon) \\ \forall p \in \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} |x_n^{k+p} - x_n^k| \leq \varepsilon \quad (2)$$

(pensamos que $\forall n \in \mathbb{N}$, fijo, $|x_n^{k+p} - x_n^k| \leq \|X^{k+p} - X^k\|$)

Importante: Observemos que la desigualdad en (2) es "uniforme" respecto de $p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

¡Esta es la clave! En efecto:

a) Fijado $n \in \mathbb{N}$, (2) implica que la sucesión $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de números reales (o complejos). Es decir, cada columna de la expresión (0) es una sucesión de Cauchy (supongamos real, aunque es similar si es compleja)

La conclusión es que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_n$ fijo

Sea $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Creo que, a estas alturas,

"todo el mundo se imagina lo que va a suceder":

$$X \in \ell_2, \quad X^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} X, \quad \text{en } \ell_2. \quad (3)$$

Ahora, la clave está en volver a (1) (¡capridos del destino!):

$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > k_0(\varepsilon), \text{ tenemos}$
 $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^N |x_n^{k+p} - x_n^k|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$\Downarrow p \rightarrow +\infty, k > k_0(\varepsilon)$ fijo
 (ε fijo, por supuesto)

$$\sum_{n=1}^N |x_n - x_n^k|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$\forall k > k_0(\varepsilon)$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - x_n^k|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (4)$$

$\forall k > k_0(\varepsilon)$

Pero (4) $\Rightarrow x - x^k \in \ell_2, \forall k > k_0(\varepsilon)$

Además $x = x^k + (x - x^k) \Rightarrow x \in \ell_2$

y "si leemos de nuevo (4)":

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > k_0(\varepsilon) \Rightarrow \|x - x^k\|_2 \leq \varepsilon$$

"Aquí acaba la demostración de que $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach". Como veís, consiste en usar "hábilmente" la expresión (1) y los "pasos al límite" (Esto es la esencia del ANÁLISIS MATEMÁTICO).

Veamos ahora un ejemplo negativo:

4.2. Sea $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ el espacio normado de funciones polinómicas (con coeficientes reales), restringidas a $[0,1]$, con la norma $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$, $\forall f \in \mathcal{P}_{[0,1]}$

Demostremos que NO ES UN ESPACIO DE BANACH. La idea básica es un resultado de cursos anteriores que debemos recordar:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (5)$$

de manera uniforme en $[0,1]$.

Ya está: de (5) se deduce que la sucesión de polinomios $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

converge, en $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ a la función exponencial. Luego $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ que no converge en $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$.

¿Necesitas alguna aclaración adicional?

Lee y medita, todas las veces que haga falta, lo que hemos afirmado en este apartado (4.2), pues el contenido es "análisis puro".

5. Otra diferencia importante entre los espacios normados de dimensión finita e infinita.

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, cualquier subespacio vectorial F , de X , de dimensión finita es cerrado. Esto "es sencillo" y, básicamente es un "juego de palabras llevado a cabo convenientemente. En efecto, sea

$B = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ una base de F . Entonces $\forall f \in \bar{F}$ (clausura o cierre de F), tenemos que $\exists (f^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F / f^k \xrightarrow[\|\cdot\|]{k \rightarrow \infty} f$

Si escribimos

$$f^1 = a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_m^1 x^m$$

$$f^2 = a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_m^2 x^m$$

$$f^k = a_1^k x^1 + a_2^k x^2 + \dots + a_m^k x^m$$

entonces $\exists a \in \mathbb{R}^m$ t. q. $(a_1^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a^1$

(6)

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_i^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a^i \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_m^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a^m \end{array} \right.$$

(como sucesiones de números reales). Si no te

enteras bien de esto, necesitas recordar algu-

nas cosas: En F tenemos definida la norma $\|\cdot\|$, inducida por \mathbb{R} . Pero como F tiene dimensión finita, todas las normas definidas en F son equivalentes y utilizamos, por ejemplo, $\|\cdot\|_\infty$ en F , es decir

$$\|g\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |g_i|, \quad \forall g = \lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_m x^m \in F,$$

sabemos que la convergencia de la sucesión (6) equivale a la convergencia por columnas.

Conclusión: $f^k \xrightarrow{\|\cdot\|} a^1 x^1 + \dots + a^m x^m \in F$

Así $\overline{F} = F$ y F es cerrado.

En dimensión infinita, la situación puede cambiar drásticamente. Para ello, "una imagen, o un ejemplo, vale más que mil palabras"

c_{00} es denso en l_2 (es decir $\overline{c_{00}} = l_2$, en el espacio $(l_2, \|\cdot\|_2)$) (7)

Observemos que C_{00} (conjunto de sucesiones "casi nulas") es un subespacio vectorial de l_2 (no cerrado, según (7)).

¡Problemas (7)! Claramente, $\overline{C_{00}} \subset l_2$.

Veamos el recíproco: sea $x \in l_2$, $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2$ es convergente, la

serie de restos tiende a cero (¿habías olvidado este hecho fundamental?). Es decir, la

sucesión $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2, \sum_{n=2}^{+\infty} |x_n|^2, \dots, \sum_{n=k}^{+\infty} |x_n|^2, \dots$

tiende a cero cuando $k \rightarrow +\infty$ (¿alguien se atreve a decir ahora que la teoría no es importante en Matemáticas?).

Por tanto:

$\forall \varepsilon > 0 \exists K_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K_0, \text{ se tiene } \sum_{n=k}^{+\infty} |x_n|^2 \leq \varepsilon$

Consideremos el elemento de C_{00} dado por

$$y^{k_0} = (x_1, x_2, \dots, x_{k_0-1}, 0, 0, \dots)$$

$$\text{Entonces } \|x - y^{k_0}\|_2 = \left(\sum_{n=k_0}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon^{1/2}.$$

"A estas alturas, espero que nadie tenga un problema porque aparece $\varepsilon^{1/2}$ en lugar de ε "

El razonamiento anterior prueba que $\overline{C_{00}} = l_2$

6. Noción de separabilidad (aquí es cuestión de gustos: existen analogías y diferencias con la dimensión finita).

Un espacio normado $(\bar{X}, \|\cdot\|)$ se dice separable si existe algún subconjunto $D \subset \bar{X}$, D denso y numerable.

Por ejemplo \mathbb{R}^n es separable, pues podríamos tomar $D = \mathbb{Q}^n$ (\mathbb{Q} es el conjunto de los números racionales).

Una idea parecida puede usarse para ver que l_p , $1 \leq p < +\infty$ es separable, pero l_∞ no lo es. En efecto, demostramos que l_1 es separable (las mismas ideas se usan para l_p , $1 < p < +\infty$).

Sea $D \subset l_1$, D : conjunto de sucesiones racionales casi nulas (D es unión numerable de conjuntos numerables y por tanto D es numerable). Por otra parte, $\forall x \in l_1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0(\varepsilon)$: $N > N_0(\varepsilon)$, se tiene $\sum_{n=N}^{+\infty} |x_n| < \varepsilon$

(También, \mathbb{Q}^{k_0} es denso en \mathbb{R}^{k_0})

Como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , $\exists q_1, \dots, q_{k_0} \in \mathbb{Q}$:

$$\sum_{n=1}^{k_0} |x_n - q_n| < \epsilon. \text{ Por tanto si } y = (q_1, \dots, q_{k_0}, 0, 0, \dots)$$

tenemos $\|x - y\|_1 < 2\epsilon$. Esto prueba que $\bar{D} = l_1$

En cambio, l_∞ no es separable.

(Te has preguntado por qué no se puede hacer una demostración similar a la anterior)

Para ver que l_∞ no es separable, podemos proceder como sigue (reducción al absurdo): sea

$$C = \{x^p, p \in \mathbb{N}\} \subset l_\infty, \text{ denso. sea } B \subset l_\infty,$$

$$B = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} : y_n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que si $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son elementos distintos de B , entonces

$$\|y - z\|_\infty = 1. \text{ Además, como } C \text{ es denso}$$

$$\text{en } l_\infty, \forall y \in B \exists x^{p(y)} \in C : \|y - x^{p(y)}\|_\infty < \frac{1}{4}$$

$$\text{Claramente } B(y, \frac{1}{3}) \cap B(z, \frac{1}{3}) = \emptyset,$$

$$\forall y, z \in B, y \neq z \text{ (pues } \|y - z\|_\infty = 1)$$

Tenemos que la aplicación $B \rightarrow \mathbb{N}$
 $y \rightarrow p(y)$

... B ... \mathbb{N} ...

es inyectiva. Luego B es numerable. Pero sabemos que B no es numerable (¿de te ha dividido el desarrollo decimal, en base 2, de los números?).

Merece la pena que reflexiones sobre el siguiente resultado abstracto y general (inundadas veces los resultados generales son más claros de enunciado que los particulares):

Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado t.q. $\exists B \subset X$, B no numerable y satisfiriendo la propiedad siguiente:

$\exists \alpha > 0 : \|x - y\| \geq \alpha, \forall x, y \in B, x \neq y$
entonces $(X, \|\cdot\|)$ no es separable.

7. COMPACTIDAD. Esto es "harina de otro costal" en los espacios normados de dimensión infinita, como iremos viendo a lo largo del curso. Pero, para abrir boca, veamos algo.

7.1. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $B \subset X$. Como X es también un espacio métrico (la métrica derivada de la norma) y por tanto,

un espacio topológico, tiene sentido hablar de compacidad: B es compacto cuando para cualquier recubrimiento de K , por abiertos, es posible extraer un subrecubrimiento finito. Esta definición de compacidad es poco útil en la práctica. Es posible que recordéis los hechos siguientes:

A) Si $\dim \mathbb{R}$ es finita, B es compacto si y sólo si B es cerrado y acotado.

B) En espacios métricos (y por tanto en espacios normados) la compacidad es equivalente a la "compacidad secuencial" (o "compacidad por sucesiones"):

B es compacto $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B, \exists (x_{n_k}) \rightarrow x \in B$ (8)

Por tanto, como el ambiente en el que nos vamos a mover este curso, es el "ambiente de espacios normados", adoptaremos la propiedad anterior (8) como "definición de conjunto compacto". Comenzamos con algo sencillo.

7.2. Ejercicio. Si $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ es normado y $B \subset \mathbb{R}$ es compacto, demuestra que B es cerrado y acotado.

En efecto, $\forall x \in \bar{B}$ (clausura o cierre de B),

$\exists (x_n) \subset B: (x_n) \rightarrow x$. Como B es compacto,

$\exists (x_{n_k}) \rightarrow y \in B$. Ahora bien (x_{n_k}) es una subsucesión de

(x_n) , que es convergente a x . Luego $y=x$, lo que implica $x \in B$. Por tanto $\bar{B} = B$, y B es cerrado.

Por otra parte, si B no fuese acotado $\exists (x_n) \subset B$:

$\|x_n\| > n, \forall n \in \mathbb{N}$ (¿Por qué?). Esto implica que (x_n) no puede tener ninguna ^{subsucesión} parcial convergente, pues cualquier sucesión convergente es acotada y (x_n) no lo es (¿OS suena esto a "juego de palabras").

El ejercicio que sigue muestra otra "diferencia significativa" entre la dimensión finita e infinita.

7.3. Demuestra que la bola cerrada unidad de ℓ^2 no es compacta.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de "vectores canónicos de ℓ^2 ".

Entonces $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}, \forall n \neq m$. Esto implica que cualquier sucesión parcial de (x_n) no es de Cauchy.

Así (x_n) no puede tener ninguna sucesión parcial convergente.

7.4 Otro ejercicio sobre "dimensión finita versus dimensión infinita".

Demuestra que la bola cerrada unidad de $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ no es compacta.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $x_n(t) = t^n, \forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$

Si (x_{n_k}) es alguna subsucesión convergente a $x \in C[0,1]$,

entonces $x_{n_k}(t) = t^{n_k}$. Como $n_k \rightarrow +\infty, (x_{n_k})$

converge puntualmente a la función

$$y: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \rightarrow \begin{cases} 0, & t \in [0,1) \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

Como y debe ser igual a x (por unicidad del límite), esto no es posible, pues $y \notin C[0,1]$.

(¿Habías olvidado que convergencia uniforme implica convergencia puntual?).

COMPLEMENTOS

C.1. $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es separable.



R. M. Fréchet (1.878-1.973)



F. Hausdorff (1.868-1.942)

Adriano

Septiembre 2022

OPERADORES LINEALES

Alonso
Octubre 2021

En Análisis Funcional, los operadores lineales juegan un papel muy importante. El alumno está familiarizado con el caso finito dimensional.

De hecho, si $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es lineal, es decir,

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \quad (1) \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

entonces L se representa como

$$L(x) = Ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

donde A es una matriz real $n \times n$, y
recíprocamente, cualquier operador de la forma
(2), es un operador lineal. Trivialmente, en

este caso, cualquier operador lineal es continuo
si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son espacios normados,
 $L: E \rightarrow F$ se dice lineal si satisface

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g), \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in E$$

IMPORTANTÉ: las imágenes de cualquier base de E determinan
unívocamente al operador L

Ejemplos de operadores lineales son:

$$1) L: (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty) \\ f \longrightarrow f'$$

$$2) L: (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longrightarrow \int_0^1 f(t) dt$$

$$3) L: (C^1[0,1], \|\cdot\|_1) \longrightarrow (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \\ f \longrightarrow \int_0^1 f(t) dt + f'(1)$$

Puede ocurrir que, como en algún ejemplo anterior, L no sea continuo (¿Puedes decir cuáles?)

Por tanto, el tema de los operadores lineales, cuando entran en juego espacios normados de dimensión infinita, parece atractivo y no trivial. Comencemos con algunas propiedades especiales de los operadores lineales.

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados y $L: E \rightarrow F$ lineal. Entonces:

(P1) L es continuo $\Leftrightarrow L$ es continuo en $e=0$

Demostración: \rightarrow) Evidente

\Leftarrow) Si $e_0 \in E$ y $(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e_0$
 entonces $(e_n - e_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ por hipótesis $\Rightarrow L(e_n - e_0) \rightarrow L(0) = 0$
 $\Rightarrow L(e_n) - L(e_0) \rightarrow 0$.

(P2) L es continuo $\Leftrightarrow L$ es continuo en algún $e_0 \in E$

Demostración: \Rightarrow) Evidente

\Leftarrow) Sea $e \in E$ y $(e_n) \rightarrow e$.
 Entonces $e_0 + (e_n - e) \rightarrow e_0$ hip. $\Rightarrow L(e_0 + e_n - e)$
 conv. a $L(e_0)$. Además $L(e_0 + e_n - e) =$
 $L(e_0) + L(e_n) - L(e) \rightarrow L(e_0) \Rightarrow L(e_n) \rightarrow L(e)$

(P3) L es continuo $\Leftrightarrow \exists K > 0$ t.q.

$$\|L(e)\|_F \leq K \|e\|_E, \forall e \in E \quad (3)$$

Demostración: \Leftarrow) Si $e \in E$ y $(e_n) \rightarrow e$,
 entonces $\|L(e_n) - L(e)\| = \|L(e_n - e)\| \leq K \|e_n - e\| \rightarrow 0$

Por tanto, $L(e_n) \rightarrow L(e)$

\Rightarrow) Si (3) no es cierto, entonces

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists e_n \in E$ t.q. $\|L(e_n)\| > n \|e_n\|$

$$\Rightarrow \underbrace{\|L\left(\frac{e_n}{n \|e_n\|}\right)\|}_{(*)} > 1. \text{ Pero } \left(\frac{e_n}{n \|e_n\|}\right) \rightarrow 0$$

pues $\left\|\frac{e_n}{n \|e_n\|}\right\| = \frac{1}{n}$. Por tanto, por hipótesis,

$L\left(\frac{e_n}{n \|e_n\|}\right) \rightarrow L(0) = 0$, lo que contradice (*)

(P4) L es continuo $\Leftrightarrow \sup_{e \in E \setminus \{0\}} \frac{\|L(e)\|}{\|e\|} < +\infty$

$\hat{=}$

$\sup_{\|e\|=1} \|L(e)\| < +\infty$

$\hat{=}$

$\forall A \subseteq E, A$ acotado en $E \Rightarrow L(A)$ es acotado en F

La demostración de las equivalencias anteriores es trivial, teniendo en cuenta (P1), (P2) o (P3).

Como ves, hay muchas caracterizaciones sobre la continuidad de los operadores lineales. Pero recalquemos ALGO OBVIO: Es para operadores lineales.

Por ejemplo $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$ es continua. Sin embargo, no satisface, por ejemplo la propiedad (P3).

Evidentemente, algunas otras funciones continuas no lineales $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pueden

de f (P3). Por ejemplo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \sin x$$

que es no lineal, satisface $|f(x)| \leq |x|$,
 $\forall x \in \mathbb{R}$. ¿Por qué?

2 ejercicios para "ir abriendo boca"

① Sea $L: (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ lineal,
y $\dim E$ finita. Entonces L es continua.

② Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ t.q. $\dim E$ es infinita.

Demuestra que existe $L: E \rightarrow E$ lineal
t.q. L no es continua, y $M: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal,
no continuo.

El ejercicio que sigue no es sencillo (le
pondremos un asterisco, o quizás dos),
pero muy bonito y significativo. Marca,
de nuevo, una diferencia profunda entre
la dimensión finita e infinita.

Antes de enunciarlo, recordemos que
un hiperplano en \mathbb{R}^n viene dado por

Conjuntos del tipo:

$$B = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = c \}$$

donde $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $c \in \mathbb{R}$, son dados
Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 , los hiperplanos son
rectas; en \mathbb{R}^3 los hiperplanos son planos,
etc.

Es fácil? (atrévete) demostrar que
cualquier hiperplano en \mathbb{R}^n es cerrado.
Ahora bien...

(*) ¿(**)?

③ Sea $(\bar{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado de
dimensión infinita. Un hiperplano se
define como un conjunto de la forma
 $H = \{ x \in \bar{X} : f(x) = \alpha \}$

donde $f: \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal, no idéntica-
mente cero y $\alpha \in \mathbb{R}$, son dados.

Demuestra que cualquier hiperplano
 H es o cerrado, o denso en \bar{X} . Demues-
tra también que existen hiperplanos densos.
(El Teorema de Hahn-Banach, que el

explicaré más adelante, nos proporcionará, también, hiperplanos cerrados)

Sugerencia: demuestra que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y no continua, entonces

$$f(B_{\mathbb{R}}(x_0; r)) = \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall r > 0.$$

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son espacios normados, $\mathcal{L}(E, F)$ va a denotar el conjunto de aplicaciones lineales continuas de E en F . En el espacio $\mathcal{L}(E, F)$ se puede definir una norma:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$$

(4)

$$\| \inf \{ k > 0 : \|f(x)\| \leq k \|x\|, \forall x \in E \}$$

Es fácil comprobar que (4) es una norma en $\mathcal{L}(E, F)$ (que verifica la igualdad dada en (4)).

Si $\dim E = n$, $\dim F = m$, $\mathcal{L}(E, F)$ no es sino el conjunto de matrices reales $M_{m \times n}$ y la norma (4) depende de las normas que se elijan en E y F (para los conceptos topológicos no importa de qué modo se es $\dim(M_{m \times n}) = mn$).

TEOREMA. Si F es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach, con la norma dada en (4).

Demostración. Sea $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$. Entonces

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists p_0(\varepsilon): p, q \geq p_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \varepsilon. \quad (5)$$

lo que implica

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists p_0(\varepsilon), p, q \geq p_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad \forall x \in E \quad (6)$$

¡Por favor, prueba detalladamente que (5) \Rightarrow (6)!

Ahora, la clave está en usar "sabiamente" (6).

En efecto:

a) Si $x \in E$ es fijo, (6) implica que $(f_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en F . Como F es un espacio de Banach, entonces $(f_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ converge a un elemento de F . Podemos así definir un operador

$$f: E \longrightarrow F, \quad x \longrightarrow \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(x), \quad \forall x \in E.$$

La intuición (¿qué hacemos si ella?) nos

dice que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ y que $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}(E, F)} f$.

Lo confirmamos, nuevamente usando (6)

$$\begin{aligned} b) f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(\alpha x + \beta y) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\alpha f_p(x) + \beta f_p(y)) = \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Lo anterior significa que f es lineal. Veamos que es continuo (nuevamente, volvemos a (6)):
fijamos $x \in E$, $\varepsilon > 0$, $p \geq p_0(\varepsilon)$, $q \rightarrow +\infty$ y tenemos

$$\|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \quad \forall x \in E \quad (7)$$

Así

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f_p(x)\| + \|f_p(x)\| \leq (\varepsilon + \|f_p\|) \|x\|, \quad \forall x \in E$$

Por tanto, f es continuo (¡Habías olvidado esto?
¡Demasiado pronto!)

d) Finalmente, veamos que $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}(E, F)} f$.

De (7), obtenemos $\|(f_p - f)(x)\| \leq \varepsilon$, $\forall x \in E: \|x\| \leq 1$

Luego:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists p_0(\varepsilon): p \geq p_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_p - f\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \varepsilon, \text{ c.q.d.}$$

En particular, obtenemos el siguiente resultado notable:

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es cualquier espacio normado, el espacio normado

$$\mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \text{ con la norma } \|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \\ \forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

es un espacio de Banach, al que denotaremos por E' (E^* en algunos textos) y al que llamaremos DUAL TOPOLÓGICO de E .

¡Algunos ejercicios para practicar con los conceptos anteriores!

Ejercicio. Sea $E = C_0 = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \}$ con la norma $\|(a_n)\|_{C_0} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ y $f: C_0 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f((a_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}. \text{ Prueba}$$

a) $f \in E'$. Calcula $\|f\|_{E'}$. ¿le alcanza la norma?

b) Si $F = \ell_\infty$, $\|(a_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$, $f: F \rightarrow \mathbb{R}$, dado por la expresión anterior, ¿ $f \in F'$? ¿ $\|f\|_{F'}$? ¿le alcanza la norma?

Ejercicio. Sea $E = \{ u \in C([0,1], \mathbb{R}) : u(0) = 0 \}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y $L: E \rightarrow \mathbb{R}$, $u \rightarrow \int_0^1 u(t) dt$, $\forall u \in E$

a) Demuestra que L es continua y

calcular su norma. ¿Se alcanza la norma?

Ejercicio. Sea $L: \ell_\infty \rightarrow \ell_1$, $(x_n) \rightarrow \left(\frac{x_n}{n^2}\right)$, $\forall (x_n) \in \ell_\infty$

a) Demuestra que L es lineal y continuo.

b) Calcula $\|L\|$ y demuestra que se alcanza.

Ejercicio. Sea $L: C_0 \rightarrow \ell_1$, $(x_n) \rightarrow \left(\frac{x_n}{n^3}\right)$, $\forall (x_n) \in C_0$

Demuestra que L es continuo y que no se alcanza su norma.

El siguiente resultado es uno de los más importantes del curso y es muy significativo pues caracteriza un concepto algebraico (dimensión de un espacio vectorial) usando un concepto topológico (la compacidad de la bola cerrada unidad).

TEOREMA (F. Riesz, 1.918)

Sea $(E, \|\cdot\|)$ normado. Entonces

$\dim E$ es finita $\Leftrightarrow \overline{B}_E(0;1)$ es compacto.

Demostración.

\Rightarrow) "Parte fácil del Teorema", pues $\overline{B}_E(0;1)$ es cerrado y acotado. Ahora bien, como la $\dim E$ es finita (en realidad, E es \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n , ¿habías olvidado esto?), tenemos que $\overline{B}_E(0;1)$ es

compacto.

↔) Antes de comenzar esta parte de la demostración, un comentario: decimos, a menudo, que la definición de compacidad en espacios topológicos es "poco usada en la práctica". Curiosamente, aquí va a demostrar todo su potencial. En efecto,

Sea $B = \bar{B}_E(0; 1)$ que, por hipótesis, es compacto.

Si $\varepsilon \in (0, 1)$ es fijo, el conjunto

$$\{B_E(b; \varepsilon), b \in B\}$$

es un recubrimiento por abiertos de B . Por ser B compacto, existe algún subrecubrimiento finito:

$$\exists F = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset B \quad t. q.$$

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n B_E(b_i; \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^n (b_i + \varepsilon B_E(0; 1)) \quad (8)$$

Sea M el subespacio de E generado por $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

Entonces, de (8) deducimos

$$B \subset M + \varepsilon B$$

Luego

$$B \subset M + \varepsilon B \subset M + \varepsilon(M + \varepsilon B) = M + \varepsilon M + \varepsilon^2 B = M + \varepsilon^2 B$$

¿Por qué $M + \varepsilon M = M, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$?

Como decían Fermi: "es fácil demostrarlo"!!

$$B \subset M + \varepsilon^n B, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (9)$$

(9) implica que $B \subset M$. En efecto, de (9) obtenemos:

$$\forall b \in B, \exists m_n \in M, b' \in B: b = m_n + \varepsilon^n b', \text{ luego } \|b - m_n\| \leq \varepsilon^n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Como } \varepsilon^n \rightarrow 0, m_n \rightarrow b.$$

Ad' $b \in \bar{M} = M$ (M tiene dimensión finita, y por tanto, es cerrado).

En conclusión

$$B \subset M \quad (10)$$

¡Mira (10) del espacio! B es la bola cerrada unidad del espacio "total" E y M un subespacio de E . Esto debe implicar:

$$E = M \quad (11)$$

En efecto, $\forall x \in E \setminus \{0\}, \frac{x}{\|x\|} \in B \subset M \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in M \Rightarrow x \in M$ (¿Por qué?) Finalmente,

Como M tiene dimensión finita, E es de dimen. finita.

El resultado anterior es uno de los "más bonitos del curso" y permite probar otros resultados poco intuitivos, si los comparamos con la dimensión

finita. Por ejemplo.

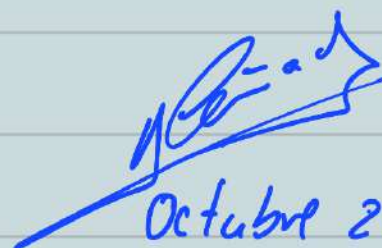
Ejercicio. Si $(E, \|\cdot\|)$ es tal que $\dim E$ es finita, sabemos que cualquier bola cerrada es compacta. Además, su interior topológico es la correspondiente bola abierta. En cambio, prueba que si $C \subset E$ es compacto y $\dim E$ es infinita, entonces $\overset{\circ}{C} = \emptyset$, $\overset{\circ}{C} = \text{interior}(C)$. Pensarías: ¡qué raros deben ser los compactos en dimensión infinita y llévas razón!

Otra caracterización de los espacios normados de dimensión finita!

Si $(X, \|\cdot\|)$, prueba que $\dim X$ es finita \Leftrightarrow Todas las normas en X son equivalentes.



F. Riesz (1880-1956)


Octubre 2021

TEOREMA DE HAHN-BANACH

~~Algebra~~
Noviembre 2021

Motivación. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado.

Si $\dim E$ es finita, sabemos que cualquier aplicación lineal $L: E \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Por ejemplo, si $\dim(E) = n$, ¿podrías escribir la expresión general de cualquier $L: E \rightarrow \mathbb{R}$, lineal?

Si $\dim(E)$ es infinita, sabemos que existen aplicaciones lineales no continuas (¿te acuerdas?) y aplicaciones lineales continuas (por ejemplo, la que es idénticamente cero). Pero, ¿podrías dar algún ejemplo de aplicación lineal CONTINUA no trivial? En espacios concretos,

$(C[a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_0$, $L^p (1 \leq p \leq +\infty)$, $L^p(a, b)$, etc.

parece fácil, pero si sólo sabemos que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita,

sin conocer la naturaleza de sus elementos (no sabemos si los elementos son sueltos, funciones...) ¿cómo podemos dar ejemplos de

aplicaciones lineales CONTINUAS que no sean idénticamente cero?

momento de la vida.

El Teorema que enunciaremos y demostraremos a continuación ¡viene en nuestra ayuda!

TEOREMA (H. HAHN, 1.927; S. BANACH, 1.929)

Sea $E(\mathbb{R})$ un espacio vectorial y $p: E \rightarrow \mathbb{R}$

verificando

(1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in E \\ \text{ii) } p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E \end{array} \right.$

Sea G un subespacio vectorial de E y

$g: G \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, l. q.

$$g(x) \leq p(x), \quad \forall x \in G \quad (2)$$

ENTONCES: $\exists f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal l. q.

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } f|_G = g \quad (f(x) = g(x), \quad \forall x \in G) \\ \text{b) } f(x) \leq p(x), \quad \forall x \in E. \end{array} \right\} (3)$$

Demostación. La idea clave es aplicar el LEMA DE ZORN a un conjunto P , ordenado e inductivo, conveniente. En nuestro caso:

$$P = \left\{ h: D(h) \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } D(h) \text{ es un sub vect. de } E \right. \\ \left. \text{t.q. } D(h) \supset G, h \text{ lineal, } h|_G = g \text{ y, además, } \right. \\ \left. h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(h) \right\} \quad (4)$$

(Los elementos de P son aplic. lineales con ciertas condiciones)

Observemos que $P \neq \emptyset$ pues $g \in P$.

P se puede ordenar de la forma siguiente:
Si $h_1, h_2 \in P$, diremos que

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2|_{D(h_1)} = h_1 \end{cases}$$

Es "trivial" comprobar que la relación así definida, \leq , verifica las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

(P, \leq) es, además, INDUCTIVO: Si $Q \subset P$ está totalmente ordenado ($\forall x, y \in Q$, o bien $x \leq y$, o bien $y \leq x$), entonces Q tiene COTA SUPERIOR ($\exists q_0 \in P: q \leq q_0, \forall q \in Q$).

Veamos que (P, \leq) es inductivo. Para ello, si

$$Q = \{h_i, i \in I\} \subset P$$

es totalmente ordenado, entonces: el elemento de P , q_0 , definido como

$$q_0: D(q_0) = \bigcup D(h_i) \longrightarrow \mathbb{R} \quad y \quad q_0(x) =$$

$= h_i(x)$, donde $i \in I$ verifica $x \in D(h_i)$, es una cota superior de \mathcal{A} .

Pensemos que la única dificultad? para probar esto es que $x \in D(h_i) \cap D(h_j)$ para algún $i \neq j, i, j \in I$! Pero esto no es problema si tenemos en cuenta que \mathcal{A} está totalmente ordenado y portanto, o bien $h_i \leq h_j$, o bien $h_j \leq h_i$. Si, por ejemplo, $h_i \leq h_j$ entonces $D(h_i) \subset D(h_j)$ y $h_j|_{D(h_i)} = h_i$.

En consecuencia $h_i(x) = h_j(x)$. Si $h_j \leq h_i$, el razonamiento es similar.

RESUMEN DE LA DEMOSTRACIÓN HASTA AHORA:
El conjunto \mathcal{P} definido en (4) es un CONJUNTO ORDENADO INDUCTIVO. El famoso LEMA DE ZORN afirma que \mathcal{P} tiene algún ELEMENTO MAXIMAL, al que llamamos f . Este f cumple todas las condiciones ⁽³⁾ del Teorema. En efecto, que f sea maximal significa:
 $\nexists h \in \mathcal{P} : f < h$ ($f \leq h$ y $f \neq h$) (5)

¡Terminemos la demostración! Para ello, perdemos que si $D(f) = E$, es decir $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f cumple las propiedades (3).

Ahora bien NO ES POSIBLE que

$$D(f) \subsetneq E \quad (6)$$

En efecto, si (6) se cumpliera, entonces es posible "construir" un elemento $h \in P$ t.q.
 $f < h$

lo que contradice (5). ¡Definamos h ! Para ello, si (6) se cumple, entonces

$$\exists x_0 \in E \setminus D(f)$$

$$\text{Sea } D(h) = D(f) + \langle x_0 \rangle = \{x + tx_0, x \in D(f), t \in \mathbb{R}\},$$

$$h: D(h) \rightarrow \mathbb{R}, h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$$

donde α debe elegirse para que

$$f(x) + t\alpha = h(x + tx_0) \leq p(x + tx_0), \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R} \quad (7)$$

En este caso, $f < h$ (que contradice el hecho de que f es maximal).

$$\text{Ahora bien, } f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$$

$$\hat{=}$$

$$\alpha \leq \frac{p(x + tx_0) - f(x)}{t}, \forall t > 0, \forall x \in D(f) \quad (8)$$

$$\alpha \leq p(x + tx_0) - f(x)$$

$$\alpha > 0, \left| \frac{f(x+t x_0) - f(x)}{t} \right| < \alpha, \forall t < 0, \forall x \in D(f)$$

(8) se cumple si y sólo si:

$$\frac{f(x+t x_0) - f(x)}{t} \leq \frac{f(y+t' x_0) - f(y)}{t'}, \forall x, y \in D(f) \left. \begin{array}{l} \forall t < 0, \forall t' > 0 \end{array} \right\} (9)$$

$$f\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) \leq \frac{f(y+t' x_0)}{t'} - \frac{f(x+t x_0)}{t} \quad (10)$$

Ahora bien, como $x, y \in D(f)$, $\frac{y}{t'} - \frac{x}{t} \in D(f)$.

Por tanto

$$f\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) \leq P\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) = P\left(\frac{y}{t'} + x_0 - x_0 - \frac{x}{t}\right) =$$

$$= P\left[\frac{1}{t'}(y+t' x_0) + \frac{1}{-t}(x+t x_0)\right] \leq \quad (11)$$

$$\leq P\left[\frac{1}{t'}(y+t' x_0)\right] + P\left[\frac{-1}{t}(x+t x_0)\right] =$$

$$= \frac{f(y+t' x_0)}{t'} + \frac{f(x+t x_0)}{-t}$$

Mirando el primero y el último término de la anterior cadena (11) de desigualdades, obtenemos (10).

Creo que, como en alguna ocasión anterior, debíamos acabar con ¡Uf!. ¡Misión cumplida! Lo que si nos merecemos es un RESUMEN DE LA DEMOSTRACIÓN, que, por cierto, es muy breve:

- ① Definición del conjunto P .
- ② P es un conjunto no vacío, ordenado e inductivo.
- ③ Por el lema de Zorn, P tiene algún elemento maximal.
- ④ Dicho elemento maximal es el funcional buscado.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE (Y, ADEMÁS, CURIOSA):
El Teorema de Hahn-Banach se enuncia y prueba en ambiente de ESPACIOS VECTORIALES (Si repasas el enunciado y demostración no verás la noción de espacio normado por ningún lado). Sin embargo sus aplicaciones

aplicaciones se tienen en espacios normados.
Buena prueba de ello es el corolario siguiente,
que en algunos textos se conoce con el nombre
de "Teorema de Hahn-Banach".

COROLARIO 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ normado, $G \subset E$ un
subespacio vectorial de E y $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y
continua. Entonces existe $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, lineal y
continua t.q. $f|_G = g$ y $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

La demostración es "trivial", aplicando el teorema
de H-B para $p: E \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|g\|_{G'} \|x\|$, donde

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in \overline{B}_G(0,1)} |g(x)|.$$

(No obstante, no te fíes de las trivialidades y
haz una demostración completa del corolario).

OTRA OBSERVACIÓN IMPORTANTE: ya tenemos
una forma de demostrar la existencia de
"infinitas aplicaciones lineales y continuas,
NO TRIVIALES DE E en \mathbb{R} , donde $(E, \|\cdot\|)$ es
un espacio normado de dimensión infinita".

En efecto, si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita, fijamos cualquier subespacio vectorial G , de dimensión finita, de E . Definimos $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ cualquier aplicación lineal^{no trivial}, que por ser $\dim G$ finita, es continua (¿habías olvidado esto?). El corolario anterior nos "proporciona" una aplicación lineal $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continua, no trivial, que extiende a g .

Parece que "problema resuelto". No obstante, quiero que reflexiones sobre lo que expuse a continuación.

Ejercicio 1. Sea $E = (C^1([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_0)$ y G el sub-vectorial de E generado por la función $\sin(x)$.

a) Demuestra que $g: G \rightarrow \mathbb{R}, u \rightarrow u'(0)$ es lineal y continua.

b) Demuestra que $f: E \rightarrow \mathbb{R}, u \rightarrow u'(0)$ es lineal y no continua.

c) ¿Cómo se explican los apartados a) y b) teniendo en cuenta el Corolario 1 anterior?

consecuencia del Teorema de H-B.

Ejercicio 2. Recordemos que si $(E(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita, entonces los hiperplanos son o cerrados o densos. Sabemos que hay hiperplanos densos (¿Por qué?) Prueba que también existen hiperplanos cerrados.

Sugerencia: un hiperplano en E viene dado por $x \in E: f(x) = \alpha$ donde $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal, no idénticamente cero y $\alpha \in \mathbb{R}$. Debes recordar algunos resultados del tema anterior (operadores lineales).



H. Hahn
(1879-1934)



S. Banach
(1892-1945)

Alc

Noviembre 2021

Historia
Noviembre
2021

ESPACIOS DE HILBERT (un primer encuentro)

El uso de operadores en MECÁNICA CUÁNTICA motivó uno de los conceptos y resultados que veremos a continuación, destacando la axiomatización de los llamados "espacios de Hilbert", llevada a cabo por J.V. Neumann en 1.929 ("Mathematische Annalen, Vol. 102, 49-131, 370-427, 1.929-1.930"). Los "espacios de Hilbert" son "una generalización natural en dimensión infinita, de los espacios euclídeos \mathbb{R}^n ". Comenzamos con la definición de PRODUCTO ESCALAR en un espacio vectorial real H .

Un producto escalar en H es una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \longrightarrow \langle f, g \rangle$$

que satisface:

- i) $\langle f, f \rangle \geq 0, \forall f \in H$; $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- ii) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \forall f, g \in H$
- iii) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $\forall f, g \in H$

Observemos que debido a las propiedades anteriores, la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal (la definición ante

El ejemplo más elemental es, quizás, el espacio euclídeo \mathbb{R}^n equipado con el producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Observemos que la norma euclídea en \mathbb{R}^n , es

$$\|x\|_2 = \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (*)$$

En los espacios de funciones $L^2(a, b)$ (Hilbert), podemos definir el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in L^2(a, b) \quad (2)$$

En los espacios de sucesiones l_2 podemos definir el producto escalar como (Hilbert)

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n, \quad \forall (a_n), (b_n) \in l_2 \quad (3)$$

Ejercicio 1. Demuestra que (1), (2) y (3) son productos escalares en los espacios citados.

Mirando (*) con atención, vemos que en \mathbb{R}^n se puede definir la norma euclídea a partir del producto escalar. ¡Esto no es casualidad! De hecho, nuestro objetivo a continuación es demostrar que

un producto escalar en H siempre da lugar a una norma en H , de tal forma que cualquier espacio vectorial donde tengamos definido un producto escalar (llamado, en adelante, espacio PREHILBERTIANO), puede transformarse en un espacio normado.

Previamente, necesitamos probar una desigualdad, llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz, que tiene interés en sí misma. Hemos tratado anteriormente esta desigualdad en casos particulares:

$$\text{En } \mathbb{R}^n \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{En } \ell_2 \quad \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} y_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{En } L^2(a,b) \quad \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

La primera de las tres, fue probada por Cauchy, en 1821. La tercera, para funciones, es conocida como "desigualdad de Bunyakovskii (1859)", probada también por Schwarz en 1884 (sin referencia al trabajo de Bunyakovskii) **in misterios histó-**

vicos sin resolver!

TEOREMA (Desigualdad de C-S).

Sea $H(\mathbb{R})$, dotado con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Entonces:

$$(C-S) \quad |\langle f, g \rangle| \leq \langle f, f \rangle^{1/2} \langle g, g \rangle^{1/2}, \quad \forall f, g \in H$$

Demostación (en absoluto intuitiva).

Si f ó g dan cero, (C-S) es trivial. Supongamos $f \neq 0$, $g \neq 0$ y consideremos la función

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \rightarrow \langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Como $p(\lambda) = \langle g, g \rangle \lambda^2 + 2\langle f, g \rangle \lambda + \langle f, f \rangle$, p es un polinomio de segundo grado con "coeficiente líder" positivo ($\langle g, g \rangle$). Por tanto

$\exists \min_{\lambda \in \mathbb{R}} p(\lambda)$ (interesante ejercicio para repasar algunos conceptos de funciones de 1 variable)

Si $g(\lambda_0) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} p(\lambda)$, entonces $g'(\lambda_0) = 0$

$$\text{y } g(\lambda_0) = \langle f + \lambda_0 g, f + \lambda_0 g \rangle \geq 0.$$

De $g'(\lambda_0) = 0$ deducimos: $2\langle g, g \rangle \lambda_0 + 2\langle f, g \rangle = 0$,

por lo que $\lambda_0 = -\frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle}$. Además,

$$\begin{aligned} 0 \leq g(\lambda_0) &= \langle g, g \rangle \lambda_0^2 + 2\langle f, g \rangle \lambda_0 + \langle f, f \rangle = \\ &= \langle g, g \rangle \frac{\langle f, g \rangle^2}{\langle g, g \rangle^2} + 2\langle f, g \rangle \frac{-\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} + \langle f, f \rangle = \\ &= \frac{\langle f, g \rangle^2 - 2\langle f, g \rangle^2 + \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle}{\langle g, g \rangle} \end{aligned}$$

Por tanto, $\langle f, g \rangle^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$, de donde se deduce C-S.

Ejercicio 2. La igualdad de la en C-S \Leftrightarrow ¿?

Ejercicio 3. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano. Prueba que

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad \forall x \in H$$

define una norma en H . (4)

Ejercicio 4. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano. Prueba la llamada "igualdad del paralelogramo"

(I.P) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, $\forall x, y \in H$,
donde $\|\cdot\|$ está definida en (4)

Ejercicio 5. Proporciona algún ejemplo de espacio normado tal que su norma no deriva de un producto escalar (como en (4)).

(*) Ejercicio 6. Prueba que si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado donde se verifica la igualdad del paralelogramo (I.P), entonces $\|\cdot\|$ deriva de un producto escalar.

(¡ojo! Ejercicio con (*)).

Ejercicio 7. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio prehilbertiano. Si $H \times H$ está dotado de la topología producto, prueba que la aplicación
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \rightarrow \langle f, g \rangle$$

es continua.

Para poner en práctica los resultados contenidos en los ejercicios anteriores, puede ser bueno el

ejercicio siguiente.

Ejercicio 8. Dedice, razonadamente, cuáles de los espacios normados que siguen son espacios prehilbertianos.

a) \mathbb{R}^3 , $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

b) $\bar{X} = C([a, b], \mathbb{R})$, $\|f\|_0 = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$, $\forall f \in \bar{X}$

c) $\bar{X} = C([a, b], \mathbb{R})$, $\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(t)| dt$, $\forall f \in \bar{X}$

d) $\bar{X} = \{ f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) : f(a) = 0 \}$, $\|f\| = \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \right]^{1/2}$, $\forall f \in \bar{X}$

DEFINICIÓN IMPORTANTE (espacio de Hilbert)
Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio prehilbertiano, decimos que H es un ESPACIO DE HILBERT, si el espacio normado $(H, \|\cdot\|)$, con $\|\cdot\|$ definida en (4), es completo.

Por ejemplo, \mathbb{R}^n , l_2 , $L^2(a, b)$ con los productos escalares usuales (definidos más arriba), son espacios de Hilbert.

Ejercicio 9. Sea C_{00} el espacio vectorial de "sucesiones casi nulas", con el producto escalar $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, $\forall (a_n), (b_n) \in C_{00}$

Demuestra que C_{00} es un espacio prehilbertiano, pero no es un espacio de Hilbert.



J.V. Neumann
1.903 - 1.957



H. Lebesgue
1.875 - 1.941

J. Lebesgue

Noviembre 2021

Igualdad del Paralelogramo. Espacios prehilbertianos,
espacios normados.

~~1.1.1~~
Noviembre 2022

Sabemos que si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio prehilbertiano, entonces se verifica la I.P. (igualdad del paralelogramo). Recordemos que $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$, $\forall u \in H$
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \forall u, v \in H \quad (1)$$

El objeto de esta "nota docente" es probar el "recíproco", conocido como Teorema de Jordan-Von Neumann.

TEOREMA. Sea $(H, \|\cdot\|)$ un espacio normado, t.q. se verifica (1). Entonces la norma de H deriva de un producto escalar.

Demostración.

En primer lugar, pensemos que tenemos que "intuir" cuál puede ser el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que da lugar a $\|\cdot\|$ en H .

Para ello, razonamos de la forma siguiente: si en H tuviéramos un producto escalar, del que se obtiene $\|\cdot\|$ de H , entonces

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (2)$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (3)$$

Si calculamos (2) - (3), obtenemos:

$$4\langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad (4)$$

Conclusión: en aquellos espacios normados $(H, \|\cdot\|)$ donde la norma deriva de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, se cumple (4). Por tanto:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] \quad (5)$$

Ahora bien, recordemos que el Teorema de Jordan-Von Neumann, que queremos probar, tiene como hipótesis:

$(H, \|\cdot\|)$ es un espacio normado que verifica I.P.(1).
¡Todavía no tenemos, por tanto, un producto escalar del que deriva la norma! No obstante, (5) nos marca el camino:

"Con las hipótesis del Teorema de Jordan-Von Neumann"

definimos

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] \quad (6)$$

¡OBJETIVO: Probar que (b) define un producto escalar! En este caso, ya habríamos acabado, puesto que: $\langle x, x \rangle^2 = \left(\frac{1}{4} [4 \|x\|^2] \right)^{1/2} = (\|x\|^2)^{1/2} = \|x\|$.

¡Adelante con el objetivo! Aquí no tenemos que ser tan pretenciosos, puesto que el Objetivo señalado se prueba con paciencia: "poco a poco", en diferentes etapas.

Hay 2 propiedades del producto escalar que son fáciles de probar con la definición (b)

1) $\langle x, x \rangle = \frac{1}{4} [4 \|x\|^2 + 0] = \|x\|^2$. Por tanto, $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] =$
 $= \frac{1}{4} [\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2] = \langle y, x \rangle$

3) ¿ $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$?
Esto es "harina de otro costal". Es pedante, pero también hay algún razonamiento "diversido"
Para probar 3), proponemos las etapas:

$$3.1) \quad d \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = \frac{1}{2} \langle x+z, 2y \rangle? \quad (7)$$

En efecto:

$$\langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] + \frac{1}{4} [\|z+y\|^2 - \|z-y\|^2] \quad (8)$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle x+z, 2y \rangle &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} [\|x+z+2y\|^2 - \|x+z-2y\|^2] \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[\| \underbrace{x+y}_{u_1} + \underbrace{z+y}_{u_2} \|^2 - \| \underbrace{x-y}_{u_3} + \underbrace{z-y}_{u_4} \|^2 \right] = (\text{I.P. (1)}) \\ &= \frac{1}{8} [2\|u_1\|^2 + 2\|u_2\|^2 - \|u_1 - u_2\|^2] - \frac{1}{8} [2\|u_3\|^2 + 2\|u_4\|^2 - \|u_3 - u_4\|^2] \\ &= \frac{1}{8} [2\|x+y\|^2 + 2\|z+y\|^2 - \|x-z\|^2] - \frac{1}{8} [2\|x-y\|^2 + 2\|z-y\|^2 - \|x-z\|^2] \\ &= \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] + \frac{1}{4} [\|z+y\|^2 - \|z-y\|^2] \quad (9) \end{aligned}$$

Vamos que (8) = (9). Por tanto, tenemos (7)

(3.2) Tomando $z=0$ en (7), tenemos:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \langle x, 2y \rangle \quad (10)$$

Por tanto,

$$\langle x+y, z \rangle = \frac{1}{2} \langle x+y, 2z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad (11)$$

$$d \cdot x = y, \quad \langle 2x, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle \quad (12)$$

Claramente, por inducción

$$\langle n x, z \rangle = n \langle x, z \rangle, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x, z \in H \quad (13)$$

Además, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \langle -n x, z \rangle &= \langle n(-x), z \rangle = n \langle -x, z \rangle = \\ &= n \frac{1}{i} [\| -x+z \|^2 - \| -x-z \|^2] = (-n) \left[\frac{1}{i} [\| x+z \|^2 - \| x-z \|^2] \right] = \\ &= -n \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

Análogamente

$$\langle p x, y \rangle = p \langle x, y \rangle, \forall p \in \mathbb{R}, \forall x, y \in H \quad (14)$$

$$(3.3) \quad \text{¿} \langle \frac{p}{q} x, y \rangle = \frac{p}{q} \langle x, y \rangle \text{?} \quad (15)$$

En efecto, de (14), tenemos:

$$\forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad p \langle \frac{x}{p}, y \rangle = p \frac{1}{p} \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Luego

$$\langle \frac{x}{p}, y \rangle = \frac{1}{p} \langle x, y \rangle \quad (16)$$

Además, si $p, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle \frac{p}{q} x, y \rangle &\stackrel{(16)}{=} \frac{1}{q} \langle p x, y \rangle \stackrel{(14)}{=} \frac{1}{q} p \langle x, y \rangle = \\ &= \frac{p}{q} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Por tanto, $\langle s x, y \rangle = s \langle x, y \rangle$, $\forall s \in \mathbb{R}$
 $\forall x, y \in H$ (17)

(3.4) ¿ $\langle r x, y \rangle = r \langle x, y \rangle$, $\forall r \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in H$?

Si, puesto que dado $r \in \mathbb{R}$, $\exists (r_n)$, sucesión de números racionales t.q. $r_n \rightarrow r$

Ahora bien, $\langle x, y \rangle$, dado en (6) es una función continua en las variables x, y (recordemos que la aplicación $\|\cdot\|: H \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.
 $x \rightarrow \|x\|$)

Por tanto:

$$\langle r x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (r - r_n) x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (r - r_n) \langle x, y \rangle =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r - r_n) \langle x, y \rangle = r \langle x, y \rangle \quad \text{c.q.d.}$$

¿Serías capaz de elaborar un resumen de las principales ideas de la demostración? ¡Ánimo!


Naiembé 2022

TEOREMA DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL.

DUAL DE UN ESPACIO DE HILBERT

Clavado
Noviembre 2021

Comenzamos este tema con un resultado sobre "teoría de aproximación", donde, bajo ciertas hipótesis de prueba la existencia y unicidad de la "mejor aproximación" de un elemento f , perteneciente a un espacio de Hilbert H , sobre un subconjunto $K \subset H$, que cumple algunas propiedades adicionales. El resultado es de interés, incluso cuando la dimensión de H es finita.



TEOREMA 1 (De la proyección sobre un convexo cerrado)

Sea H un espacio de Hilbert (real), $K \subset H$, K convexo, cerrado y no vacío. Entonces, $\forall f \in H$ existe un único $u \in K$ tal que $\|f - u\| = \inf_{k \in K} \|f - k\|$.

$\forall f \in H, \exists! u_f \in K : d(f, u_f) = d(f, K)$.

Además, u_f se caracteriza por las dos propiedades siguientes:

i) $u_f \in K$

ii) $\langle f - u_f, v - u_f \rangle \leq 0, \forall v \in K$.

Finalmente, si $P_K : H \rightarrow H$
 $f \mapsto u_f$

entonces, P_K es lipschitziana, con constante de Lipschitz uno; es decir P_K es "no expansiva"

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|, \forall f_1, f_2 \in H$$

Demostración. Se realiza en cuatro etapas:

① Existencia de u_f .

Recordemos que $d(f, K) = \inf_{v \in K} d(f, v)$. Por tanto,

por definición de ínfimo, $\exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ t.q.

$$d(f, v_n) \rightarrow d(f, K) = D \geq 0. \quad (1)$$

Objetivo: demostrar que (v_n) es una sucesión de Cauchy en H . Para ello, apliquemos la igualdad del paralelogramo a los vectores $f - v_n$ y $f - v_m$ obteniendo:

$$\|f - v_n + f - v_m\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2[\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2]$$

Ahí,

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= 2[\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2 - \|2f - (v_n + v_m)\|^2] = \\ &= 2[\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2] - 4\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, $\frac{v_n + v_m}{2} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}v_m$, luego como K

es convexo, $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ y por tanto,

$$\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2 = [d(f, \frac{v_n + v_m}{2})]^2 \geq D^2. \text{ Así,}$$

$$\|v_n - v_m\|^2 \leq 2[\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2] - 4D^2$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow_{n \rightarrow +\infty} & & \downarrow_{m \rightarrow +\infty} \\ D^2 & & D^2 \\ \underbrace{\hspace{10em}} & & \\ \downarrow_{n, m \rightarrow +\infty} & & \\ 0 & & \end{array}$$

Por tanto $\|v_n - v_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow +\infty} 0$, lo que implica que (v_n) es una sucesión de Cauchy en H . Como H es completo, $\exists v \in H$ t. q. $(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$. Como K es cerrado, $v \in K$

Finalmente, como $d(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \rightarrow d(x, y)$

es continua, valiendo a (1), concluimos que

$$d(f, v) = d(f, K) = D$$

② Caracterización de u_f .

$$\left. \begin{array}{l} u_f \in K \\ d(f, u_f) = d(f, K) = D \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} u_f \in K \\ \langle f - u_f, v - u_f \rangle \leq 0, \forall v \in K \end{array} \right\} \text{(*)}$$

Demostración.

\Rightarrow) Sea $v \in K$, $x \equiv (1-t)u_f + tv$, $t \in (0, 1)$

Por ser K convexo, $x \in K$, luego:

$$\|f - u_f\|^2 \leq \|f - x\|^2 = \|f - (1-t)u_f - tv\|^2 =$$

$$= \langle f - u_f - t(v - u_f), f - u_f - t(v - u_f) \rangle =$$

$$\|f - u_f\|^2 - 2t \langle f - u_f, v - u_f \rangle + t^2 \|v - u_f\|^2. \text{ Por tanto}$$

$$2t \langle f - u_f, v - u_f \rangle \leq t^2 \|v - u_f\|^2.$$

si $t \rightarrow 0^+$, obtenemos $\langle f - u_f, v - u_f \rangle \leq 0, \forall v \in K$

\Leftarrow) si $v \in K$, entonces:

$$\|f - u_f\|^2 - \|f - v\|^2 = \langle f - u_f, f - u_f \rangle - \langle f - v, f - v \rangle =$$

$$= \langle f, f \rangle - 2\langle f, u_f \rangle + \langle u_f, u_f \rangle - \langle f, f \rangle + 2\langle f, v \rangle - \langle v, v \rangle$$

(2)

También, ≤ 0 por hipótesis ≤ 0

$$2 \langle f - u_f, v - u_f \rangle - \langle u_f - v, u_f - v \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\langle f, v \rangle - 2\langle f, u_f \rangle - 2\langle u_f, v \rangle + 2\langle u_f, u_f \rangle \\
&- \langle u_f, u_f \rangle + 2\langle u_f, v \rangle - \langle v, v \rangle = \\
&= 2\langle f, v \rangle - 2\langle f, u_f \rangle + \langle u_f, u_f \rangle - \langle v, v \rangle = (3)
\end{aligned}$$

En conclusión

$$\|f - u_f\|^2 - \|f - v\|^2 = (2) = (3) \leq 0. \text{ Luego}$$

$$\|f - u_f\|^2 \leq \|f - v\|^2, \forall v \in K,$$

por lo que

$$d(f, u_f) = \|f - u_f\| = d(f, K).$$

③ Unicidad de u_f .

Sean u_f^1, u_f^2 verificando (*). Entonces:

$$\langle f - u_f^1, v - u_f^1 \rangle \leq 0, \langle f - u_f^2, v - u_f^2 \rangle \leq 0, \forall v \in K$$

Luego

$$\underbrace{\langle f - u_f^2, u_f^2 - u_f^1 \rangle}_{(4)} \leq 0, \underbrace{\langle f - u_f^1, u_f^1 - u_f^2 \rangle}_{(5)} \leq 0$$

Por tanto $(4) + (5) \leq 0$. Desarrollando, tenemos

$$\langle f, u_f^2 - u_f^1 \rangle - \langle u_f^1, u_f^2 - u_f^1 \rangle + \langle f, u_f^1 - u_f^2 \rangle - \langle u_f^2, u_f^1 - u_f^2 \rangle \leq 0$$

$$0 \text{ sea, } \underbrace{\langle u_f^1, u_f^1 - u_f^2 \rangle - \langle u_f^2, u_f^1 - u_f^2 \rangle}_{=} \leq 0$$

$$\langle u_f - u_f, u_f - u_f \rangle \leq 0$$

$$\|u_f^1 - u_f^2\|^2 \leq 0$$

$$\Downarrow \\ u_f^1 = u_f^2$$

4) Propiedades de $P_K: H \rightarrow H, f \rightarrow u_f$.
 Sean $P_K(f_1) = u_{f_1}, P_K(f_2) = u_{f_2}$, entonces,
 por la caracterización previa:

$$\underbrace{\langle f_1 - u_{f_1}, u_{f_2} - u_{f_1} \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle f_2 - u_{f_2}, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle}_{\leq 0} \leq 0$$

Luego:

$$\underbrace{\langle f_2, u_{f_2} - u_{f_1} \rangle}_{c)} + \underbrace{\langle u_{f_1}, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle}_{a)} - \underbrace{\langle f_2, u_{f_2} - u_{f_1} \rangle}_{d)} - \underbrace{\langle u_{f_2}, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle}_{b)} \leq 0$$

$$c) + a) - d) - b) \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$a) - b) \leq d) - c)$$

Es decir,

$$\underbrace{\langle u_{f_1} - u_{f_2}, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle}_{\|u_{f_1} - u_{f_2}\|^2} \leq \langle f_2 - f_1, u_{f_2} - u_{f_1} \rangle \stackrel{CS}{\leq} \|f_2 - f_1\| \|u_{f_2} - u_{f_1}\|$$

Por tanto:

$$\|u_{f_1} - u_{f_2}\| \leq \|f_1 - f_2\|, \forall f_1, f_2 \in H$$

¡uf!

Comentario personal: la demostración de este Teorema es un latazo. Pero las aplicaciones son "numerosas" e "importantes", como veremos a continuación. Por ejemplo:

TEOREMA 2 (De la proyección ortogonal).

Sea K un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert H . Entonces

$$H = K \oplus K^\perp \quad (6)$$

donde $K^\perp = \{h \in H : \langle h, x \rangle = 0, \forall x \in K\}$.

Además, las proyecciones de H sobre K y K^\perp son ^{lineales} _{continuas}.

Nota importante: (6) significa que

$\forall h \in H, h = h_1 + h_2, h_1 \in K, h_2 \in K^\perp$, de manera única. Además, las proyecciones $H \rightarrow K, h \rightarrow h_1; H \rightarrow K^\perp, h \rightarrow h_2$ son ^{continuas}.

Demostración. Sea $P_K : H \rightarrow K$, la aplicación definida en el Teorema anterior. Sabemos que $\langle h - P_K h, v - P_K v \rangle = 0 \quad \forall h \in H, \forall v \in K$. Luego

como K es, ahora, un subespacio cerrado de H ,
($v \in K \Rightarrow tv \in K, \forall t \in \mathbb{R}$), obtenemos

$$\langle f - P_K f, tv - P_K f \rangle = 0, \forall f \in H, \forall v \in K, \forall t \in \mathbb{R}$$

Lo que implica

$$t \langle f - P_K f, v \rangle = \langle f - P_K f, P_K f \rangle, \forall f \in H, \forall v \in K, \forall t \in \mathbb{R}$$

Fijamos f, v

¿Trivialmente? la desigualdad anterior implica

$$\langle f - P_K f, v \rangle = 0, \forall f \in H, \forall v \in K \quad (7)$$

¿Por qué?

$$\text{Ahí, } f = (P_K f) + (f - P_K f) \in K + K^\perp \quad (8)$$

Además $K \cap K^\perp = \{0\}$ (¿Por qué?)

Luego

$$H = K \oplus K^\perp$$

Además, $P_K: H \rightarrow K$ es lineal. En efecto,
no os perdáis la demostración que es curiosa:

Sabemos que si $f_1, f_2 \in H$, entonces:

$$\left. \begin{aligned} \langle f_1 - P_K f_1, v \rangle &= 0, \forall v \in K \\ \langle f_2 - P_K f_2, v \rangle &= 0, \forall v \in K \end{aligned} \right\}$$

Por tanto,

$$\langle f_1 + f_2 - (P_K f_1 + P_K f_2), v \rangle = 0, \forall v \in K \quad (9)$$

Pero, no olvidemos que al ser K un subespacio vectorial cerrado, (9) caracteriza a $P_K(f_1 + f_2)$ (véase (7)). Luego

$$P_K(f_1 + f_2) = P_K(f_1) + P_K(f_2)$$

¿Por qué? Es posible que, a estas alturas, estéis sintiendo la necesidad imperiosa de asistir a clase (¡nunca debíais haberlo dejado!)

Análogamente, si $f \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\langle f - P_K f, v \rangle = 0, \forall v \in K$, lo que implica

$$\langle \lambda f - \lambda P_K f, v \rangle = 0, \forall v \in K$$

Nuevamente (véase, otra vez (7)), esto implica

$$P_K(\lambda f) = \lambda P_K(f), \forall f \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

En conclusión: P_K es lineal.

Finalmente: $\forall f \in H$ se tiene

$$f = \underbrace{P_K f}_K + \underbrace{(f - P_K f)}_{K^\perp} = u + v, u \in K, v \in K^\perp$$

Como $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$
tenemos que $\|u\| \leq \|f\|$; $\|v\| \leq \|f\|$, lo que
implica:

$$\|P_K f\| \leq \|f\|, \quad \|(I - P_K)(f)\| \leq \|f\|, \quad \forall f \in H \quad (10)$$

Como $P_K: H \rightarrow H$, $(I - P_K): H \rightarrow H$,
son aplicaciones lineales, (10) implica que
son continuas (¿habías olvidado esto? ¡Demuéstralo
pronto!)

Los dos ejercicios que siguen están propues-
tos en ambientes "elementales": \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 ,
pero pueden contribuir a entender los
teoremas 1 y 2, anteriores.

Ejercicio 1. Calcúlese la "mejor aproximación" para
 $H = \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = xy$ (producto usual en \mathbb{R})
 $K = [a, b] \cup [c, d]$, $a < b < c < d$
(H Hilbert, K cerrado no convexo)

Ejercicio 2. $H = \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = xy$, $K = (a, b)$
(H Hilbert, K convexo, no cerrado)

Ejercicio 5. $H = \mathbb{R}^2$, $\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$

$$K = [0, 1] \times [0, 1]$$

(H no Hilbert, K convexo, cerrado)

NOTA: Si $(\bar{X}, \|\cdot\|)$ es normado, $K \subset \bar{X}$, entonces dado $f \in \bar{X}$, decimos que u_f es "una mejor aproximación de f en K " si

$$\left. \begin{array}{l} u_f \in K \\ d(f, u_f) = d(f, K) \end{array} \right\}$$

Los ejercicios anteriores dicen que u_f puede existir o no, y en caso de que exista, puede no ser única. Los Teoremas 1 y 2, "ponen las cosas en su sitio" para \bar{X} Hilbert y K convexo y cerrado.

DUAL DE UN ESPACIO DE HILBERT

Recordemos: dado H , espacio de Hilbert respecto de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, H es un espacio normado ($\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, $\forall x \in H$). Por tanto, tiene sentido definir:

a) El espacio "dual algebraico de H ":

$$H^\# = \{ f: H \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal} \}$$

b) El espacio "dual topológico" de H :

$$H^* = H' = \{ f: H \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal y } \underline{\text{continua}} \}$$

Tenemos que $H' = H^* \subset H^\#$ y que $H' = H^* = H^\# \Leftrightarrow \dim H$ es finita.

El Teorema que sigue nos dice que si H es un espacio de Hilbert, $H' = H$. El sentido que tiene la expresión $H' = H$ se explica en el mismo Teorema.

TEOREMA (De representación de Riesz-Fréchet, sobre el dual de un espacio de Hilbert).

Sea H un espacio de Hilbert. Entonces,

$$\forall f \in H' \exists! \underset{f}{v} \in H : f(x) = \langle v, x \rangle, \forall x \in H.$$

Además

$$\|f\|_{H'} = \|v_f\|_H$$

(11)

Demostración:

$$\text{Si } f \equiv 0, \forall f = 0$$

Sea $f \neq 0$, $\ker f = \{u \in H: f(u) = 0\}$ es un subespacio vectorial cerrado de H . Luego, por el teorema anterior

$$H = \ker f \oplus (\ker f)^\perp$$

Afirmo

$$\exists u \in (\ker f)^\perp : f(u) = 1 \quad (*)$$

(Demostración de $(*)$): Como $f \neq 0 \Rightarrow \ker f \subsetneq H$

$\Rightarrow \exists z \in (\ker f)^\perp : f(z) \neq 0$. Entonces

$$f\left(\frac{z}{f(z)}\right) = 1. \text{ Así, podemos tomar } u = \frac{z}{f(z)}.$$

Seguimos: Si $(*)$ está demostrado, entonces:

$$\forall x \in H, x - f(x)u \in \ker f \quad (\text{pues } f(x - f(x)u) = f(x) - f(x)f(u) = f(x) - f(x) = 0)$$

$$\text{Por tanto } \begin{cases} x - f(x)u \in \ker f \\ u \in (\ker f)^\perp \end{cases}$$

$$\text{Luego } \langle x - f(x)u, u \rangle = 0, \forall x \in H$$

$$\langle x, u \rangle - f(x) \langle u, u \rangle$$

En conclusión,

$$f(x) = \frac{\langle x, w \rangle}{\langle w, w \rangle} = \left\langle x, \frac{w}{\|w\|^2} \right\rangle$$

$\forall x \in H$

Sea $v_f = \frac{w}{\|w\|^2}$, entonces

$$f(x) = \langle x, v_f \rangle, \quad \forall x \in H$$

Además, $|f(x)| \leq \|x\| \|v_f\|, \quad \forall x \in H$

Esto implica $\|f\|_{H'} \leq \|v_f\|$ (12)

Además, como $\frac{v_f}{\|v_f\|} \in \{u \in H; \|u\| = 1\}$

$$\Rightarrow f\left(\frac{v_f}{\|v_f\|}\right) = \left\langle \frac{v_f}{\|v_f\|}, v_f \right\rangle = \|v_f\|, \text{ tenemos}$$

que $\|f\|_{H'} \geq \|v_f\|$ (13)

Finalmente, (12) y (13) implican $\|f\|_{H'} = \|v_f\|$

Algunos comentarios:

1) Como $\forall v \in H, v$ fijo, la aplicación

$$H \longrightarrow \mathbb{R}, x \longrightarrow \langle x, v \rangle \quad (14)$$

es lineal y continua, el Teorema anterior nos dice que todos los elementos de H' son de la forma (14). Como se cumple (11), la aplicación

$$H' \longrightarrow H$$

$$f \longrightarrow v_f$$

(donde v_f es el dado por el Teorema)

es lineal, continua, biyectiva y "conserva la norma". Luego H' y H son "idénticos"

como espacios de Banach. Esto nos permite afirmar:

"El dual topológico de \mathbb{R}^n , con la norma euclídea es \mathbb{R}^n "

"El dual topológico de l_2 , con la norma usual, es l_2 "

"El dual topológico de $L^2(a,b)$, con la norma usual, es $L^2(a,b)$ ", etc.

Ejercicio 4. Si $1 \leq p \leq +\infty$, prueba que la norma

usual en $L_p(a,b)$ proviene de un producto escalar si y solamente si $p=2$.

Ejercicio 5. Aplica el Teorema de la proyección ortogonal al caso:

$$H = L^2(0, 2\pi), \quad K = \left\{ f \in L^2(0, 2\pi) : \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0 \right\},$$

encontrando la "mejor aproximación en K " de las funciones de la forma: $\lambda \cos^2(7x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 6. Considere el espacio $H = (c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

donde

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

Demuestre que el operador lineal

$$f: H \rightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}$$

es continuo y que $\nexists v \in H$ t. q.

$$f((x_n)) = \langle v, (x_n) \rangle, \quad \forall (x_n) \in H \quad (*)$$

En relación con el Teorema de Riesz-Fréchet, ¿qué conclusión se tiene?

Lo de sustituye $H = (c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ por l_2 , con

el producto escalar usual, demuéstrale que $f: l_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f((x_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}$, es lineal y continuo.

¿de cumple ahora *? ¿también es v?

Ejercicio 7. Sea $\bar{X} = \{f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$
¿ES \bar{X} con la norma $\|f\| = \left(\int_0^1 |f''(t)|^2 dt\right)^{1/2}$
un espacio prehilbertiano?

Escribale el producto escalar del que deriva la norma anterior.

Ejercicio 8. Considérese el espacio vectorial l_2 , con el producto escalar:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n y_n}{n}$$

Prueba que, con la norma derivada del producto escalar anterior, la sucesión:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1 &= (1, 0, 0, \dots) \\ \bar{x}^2 &= \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots\right) \\ &\dots \\ \bar{x}^k &= \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \dots\right) \end{aligned}$$

es de Cauchy, no convergente.

Ejercicio 9. Sea P_n el espacio vectorial real de los polinomios de una variable, de grado menor o igual que n , con el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt, \quad \forall p, q \in P_n.$$

Prueba que si $L: P_n \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal, entonces L es continua.

Prueba que si $a < b$ son números reales dados, entonces $\exists! p \in P_n$ t. q.

$$\int_a^b q(t)dt = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt, \quad \forall q \in P_n$$

Ejercicio 10. Sea (λ_n) una sucesión de n reales

t. q. $\lambda_n \in (0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

trivialmente $+\infty$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n y_n$$

es un producto escalar en l_2 . Demuestra que si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$ es convergente,

entonces l_2 con la norma derivada del producto

El producto escalar, no es completo.

Ejercicio 11. Sea P el espacio vectorial de los polinomios reales en una variable, definidos en $[a, b]$ ($a < b$, fijos), con el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(t)q(t) dt$$

Proporciona un ejemplo de $L: P \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y continuo, para el que no se cumple el Teorema de Riesz-Fréchet. ¿Qué conclusión se obtiene sobre $(P, \|\cdot\|)$, donde $\|\cdot\|$ es la norma derivada del anterior producto escalar?

Ejercicio 12. Sea P_n el e. vectorial de polinomios de una variable real, definidos en $[a, b]$ y de grado $\leq n$. Demuestra que

$$\forall f \in L^2(a, b), \exists! p_f \in P_n \text{ t. } q.$$

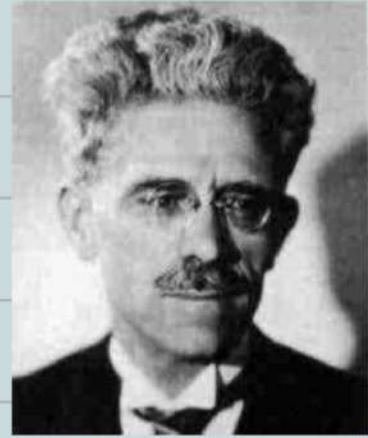
$$\|f - p_f\|_2 \leq \|f - p\|_2, \quad \forall p \in P_n.$$

Alvarez

Noviembre 2021



F. Riesz
1.880 - 1.956



M. Fréchet
1.878 - 1.973

LEMA DE BAIRE. APLICACIONES: T. de Banach-Steinhaus, T. Gráfica cerrada, T. Aplicación abierta.

~~11/12/2022~~
Diciembre 2022

MOTIVACIÓN: El Teorema siguiente es bien conocido:

TEOREMA (Convergencia uniforme e integración)

Sea $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que $(f_n) \rightarrow f$, uniformemente en $[a, b]$. Entonces

f es continua en $[a, b]$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ (1)

Existe la versión similar para series de funciones: Si $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas t.q. la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$, entonces:

la función $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ es continua en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (2)$$

Motivado por este resultado, W. Osgood escribió en 1.897, un artículo titulado:

"Nonuniform convergence and the integration of series term by term", donde intentaba poner una hipótesis más débil que la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ en $[a, b]$,

aunque manteniendo la conclusión de "integración término a término".

En el desarrollo de dicho artículo, Osipov probó el siguiente resultado:

"Si (O_n) es una sucesión de abiertos, densos en \mathbb{R} , entonces $\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$ es un subconjunto denso en \mathbb{R} ".

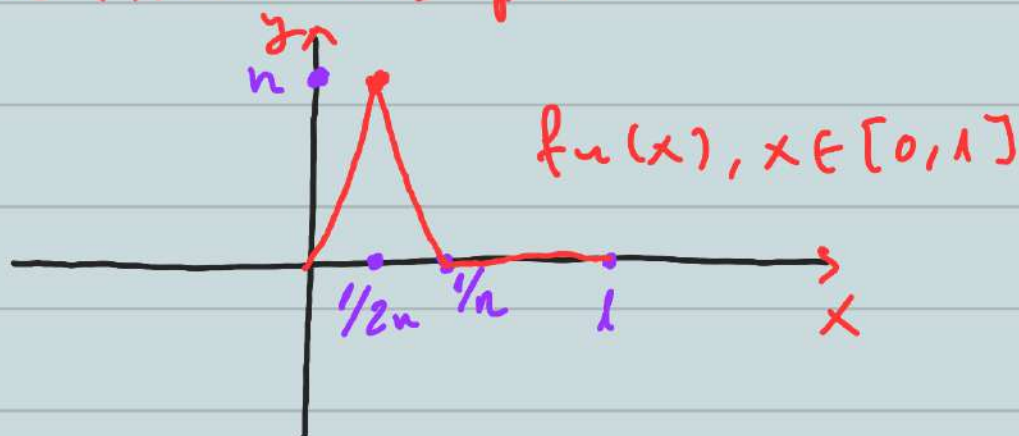
En 1.899, R. Baire probó un resultado idéntico en \mathbb{R}^m .

Finalmente, en 1.927, S. Banach y H. Steinhaus, probaron la versión definitiva en cualquier espacio métrico completo.

Este es el tema de esta "nota docente", donde se incluyen, además, diversas aplicaciones.

Ejercicio 1. Muestra que la intersección de un número infinito de abiertos de \mathbb{R} , no es necesariamente abierto.

Ejercicio 2. Considera la sucesión de funciones cuyas gráficas están dadas por



Demuestra que $\forall x \in [0, 1], f_n(x) \rightarrow 0$, pero que, sin embargo

$$\int_0^1 f_n(x) dx \not\rightarrow \int_0^1 0 dx = 0$$

Demostremos en esta nota docente los dos Teoremas que siguen y, además, que son equivalentes.

TEOREMA 1 (Lema de Baire)

Sea (E, d) un espacio métrico completo y $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados t.q. $\text{int}(M_n) = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($\text{int}(M_n) = \overset{\circ}{M}_n$, interior topológico de M_n).

Entonces $\text{int} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n \right) = \emptyset.$

TEOREMA 2. Sea (E, d) un espacio métrico completo y $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos, densos en E . Entonces:

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$ es denso en E .

Ejercicio 3. Demuestra que

Teorema 1 \Rightarrow Teorema 2

Ejercicio 4. Demuestra que

Teorema 2 \Rightarrow Teorema 1

Ejercicio 5. Sea (E, d) un espacio métrico completo y $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados tales que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n = E$.

Entonces $\exists n \in \mathbb{N} : M_n^o \neq \emptyset.$

Ejercicio 6. Encuentra el error del siguiente razonamiento:

Sea $X = \{x_1, x_2\}$, $x_1 \neq x_2$ y $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ la distancia "discreta", es decir:

$$d(x_1, x_1) = d(x_2, x_2) = 0, \quad d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) = 1.$$

Entonces:

a) (X, d) es completo.

b) $M_1 = \{x_1\}$, $M_2 = \{x_2\}$ son cerrados con interior vacío.

c) $X = M_1 \cup M_2$ no tiene interior vacío.

Ejercicio 7. Pruebe que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces la dimensión de X es o finita o infinita NO NUMERABLE. ¿Es necesaria la hipótesis $(X, \|\cdot\|)$ Banach?

J. Álvarez } Diciembre 2022

BIBLIOGRAFÍA

Bachman, G. y Narici, L. Análisis Funcional.
Tecnos, 1. 1981.

Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev spaces and
Partial Differential Equations. Springer, 2011.

Hutson, V. y Pym, J.S. Applications of Functional
Analysis and Operator Theory. Academic Press, 1. 1980

Liusternik, I. y Sobolev, V. Elements of Functional
Analysis. Frederick Ungar Publishing Company,
1. 1961

Encyclopedia of Mathematics

https://encyclopediaofmath.org/wiki/Main_Page

Mac Tutor <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk>