Apuntes de Análisis Funcional y Teoría de la Medida

Rafael Payá Albert

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Tema 1: Espacios de Medida

11-18 de marzo de 2010

Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

- Ω es un conjunto no vacío
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \Omega \in \mathcal{A} \\
&\text{(ii)} \quad A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A} \\
&\text{(iii)} \quad A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

- $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es una medida (positiva):

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \mu(\emptyset) = 0 \\
&\text{(b)} \quad \mu \text{ es } \sigma\text{-aditiva:}
\end{aligned}$$

$$A_n \in \mathcal{A} \;\forall n \in \mathbb{N}, \;\; A_n \cap A_m = \emptyset \;(n \neq m) \;\Rightarrow\; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Espacios medibles

Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

Ω es un conjunto no vacío y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos medibles.

Ejemplos extremos

La σ-álgebra trivial $\{\emptyset, \Omega\}$ y la σ-álgebra discreta $\mathcal{P}(\Omega)$

Ejemplo importante: σ-álgebras de Borel

- Toda intersección de σ-álgebras es una σ-álgebra
- Para $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, existe la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{S}$
- Ω espacio topológico con topología $\mathcal{T}$: la σ-álgebra de Borel de Ω es la engendrada por $\mathcal{T}$. Sus elementos son los conjuntos de Borel en Ω.

Conjuntos medibles

σ-álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Operaciones con conjuntos medibles

Toda σ-álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{A}$

1. Orden en $[0,\infty]$

$[0,\infty]$

$$[0,\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\} \cup \{\infty\} = [0,\infty[\cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en $[0,\infty[$
- $x \leqslant \infty \quad \forall\, x \in [0,\infty]$.

Propiedades del orden

- Orden total
- Todo subconjunto no vacío de $[0,\infty]$ tiene supremo e ínfimo

2. Topología de $[0,\infty]$

Topología de $[0,\infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$
\begin{aligned}
&]\alpha,\beta[= \{x\in[0,\infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha,\beta\in[0,\infty])\\
&]\alpha,\infty] = \{x\in[0,\infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha\in[0,\infty])\\
&[0,\beta[= \{x\in[0,\infty] : x < \beta\} \quad (\beta\in[0,\infty])
\end{aligned}
$$

- Subbase numerable: $\{[0,\beta[: \beta\in\mathbb{Q}^+\} \bigcup \{]\alpha,\infty] : \alpha\in\mathbb{Q}^+\}$

Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a $[0,1]$
- Compactación por un punto de $[0,\infty[$
- Toda sucesión monótona converge en $[0,\infty]$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geqslant n\}$
- $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geqslant n\}$
- $x_n \leqslant y_n \ \forall n\in\mathbb{N} \ \Rightarrow \ \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} y_n, \ \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty} y_n$
- $x_n \leqslant y_n \ \forall n\in\mathbb{N}, \ \{x_n\}\to x, \ \{y_n\}\to y \ \Rightarrow \ x\leqslant y$

Suma en $[0,\infty]$

Suma en $[0,\infty]$

- Suma usual en $[0,\infty[$
- $x+\infty=\infty+x=\infty \quad \forall\, x\in[0,\infty]$

Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos: $x+y=x+z,\ x<\infty \ \Rightarrow\ y=z$
- Compatible con el orden: $x_1\leqslant y_1,\ x_2\leqslant y_2 \ \Rightarrow x_1+x_2\leqslant y_1+y_2$
- Continua: $\{x_n\}\to x,\ \{y_n\}\to y \ \Rightarrow\ \{x_n+y_n\}\to x+y$
- Tiene sentido la suma de cualquier serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$
- Incondicional: Para $a:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to[0,\infty]$ y $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ biyectiva, se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a(m,n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a(m,n) = \sum_{k=1}^{\infty} a\big(\sigma(k)\big)$$

Producto en $[0,\infty]$

Producto en $[0,\infty]$

- Producto usual en $[0,\infty[$
- $x\,\infty \;=\; \infty\, x \;=\; \infty \quad \forall\, x \in]0,\infty]$
- $0\,\infty = \infty\,0 = \;0$

Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Compatible con el orden: $x_1 \leqslant y_1,\; x_2 \leqslant y_2 \;\Rightarrow\; x_1 x_2 \leqslant y_1 y_2$
- Crecientemente continuo: $\{x_n\} \nearrow x,\; \{y_n\} \nearrow y \;\Rightarrow\; \{x_n y_n\} \to x y$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Concepto de Medida

Medida

$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ verificando:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Medidas de Borel

Medida de Borel en un espacio topológico Ω = Medida definida en la σ-álgebra de Borel de Ω

Consecuencias

Propiedades de las medidas

Toda medida $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A},\ A_k \cap A_j = \emptyset\ (k \neq j) \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

- Creciente: $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leqslant \mu(B)$
- Subaditiva: $A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A},\ A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

- Decrecientemente continua donde es finita:

$$A_n \in \mathcal{A},\ A_n \supseteq A_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mu(A_1) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Sugestivamente: $\{A_n\} \nearrow A \quad \Rightarrow \quad \{\mu(A_n)\} \nearrow \mu(A)$
Mientras que: $\{A_n\} \searrow A,\ \mu(A_1) < \infty \quad \Rightarrow \quad \{\mu(A_n)\} \searrow \mu(A)$

Primeros Ejemplos de medidas

Medidas discretas

$\Omega \neq \emptyset$ arbitrario, $m : \Omega \to [0,\infty]$ cualquier función y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Se define:

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} m(x) := \sup\Big\{\sum_{x\in J} m(x) : J \subseteq A,\ J \text{ finito}\Big\} \qquad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

Medidas de Dirac

Fijado $x \in \Omega$, para $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se define:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Se obtiene con $m(x) = 1$ y $m(\omega) = 0\ \forall \omega \in \Omega \setminus \{x\}$

Medida que cuenta ("counting measure")

Para todo $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ se define $\mu(A)$ como el número de elementos de A, entendiéndose que $\mu(A) = \infty$ cuando A es un conjunto infinito.
Se obtiene con $m(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$.

Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^{N} I^{(k)} \qquad m(I) = \prod_{k=1}^{N} \left(\sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

Medida exterior de Lebesgue

$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \, : \, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Medida de Lebesgue

- Conjuntos medibles-Lebesgue:

$$\mathcal{M} = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^N \, : \, \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E) \ \ \forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \right\}$$

- Medida de Lebesgue: $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{M}}$

$$\lambda : \mathcal{M} \to [0,\infty], \quad \lambda(E) = \lambda^*(E) \ \ \forall E \in \mathcal{M}$$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y $\lambda : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneqq \mathcal{M} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
- $E \subset \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad E \in \mathcal{M}$
- $\lambda|_{\mathcal{B}}$ (medida de Borel-Lebesgue) es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^N$ que extiende a m
- También λ es la única medida definida en $\mathcal{M}$ que extiende a m

Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \operatorname{ínf}\left\{\lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N\right\} \qquad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists G\ :\ E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N,\ \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists F\ :\ F = \overline{F} \subset E,\ \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$
- $E \subseteq B$, conjunto de tipo G_δ con $\lambda(B \setminus E) = 0$
- $E \supseteq A$, conjunto de tipo F_σ con $\lambda(E \setminus A) = 0$

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \lambda(E) &= \operatorname{ínf}\{\lambda(G)\ :\ G \text{ abierto},\ G \supseteq E\} \\ &= \sup\{\lambda(K)\ :\ K \text{ compacto},\ K \subseteq E\} \end{aligned}$$

Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones:
  $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones:
  $E \in \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; E+x \in \mathcal{M}$, en cuyo caso, $\lambda(E+x) = \lambda(E)$
- Salvo un factor de proporcionalidad, la medida de Borel-Lebesgue es la única medida de Borel en $\mathbb{R}^N$, finita en compactos e invariante por traslaciones.
- La hipótesis "finita en compactos" se puede sustituir por la existencia de un conjunto abierto no vacío con medida finita
- La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es invariante por isometrías.

Construcción de Medidas

Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

Otros ejemplos importantes

- Medidas de Lebesgue-Stieltjes
- Medidas de Haar
- Medidas de Hausdorff

Tema 2: Integración

18 de marzo de 2010

1. Funciones medibles

2. Integral

Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles, $f : \Omega \to Y$

$$f \ \text{medible} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Primeras propiedades

- La composición de funciones medibles es medible
- Si $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra engendrada por $\mathcal{T}$:

$$f \ \text{medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $(Y, \mathcal{T})$ espacio topológico, $f : \Omega \to Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles
- Una función continua de una función medible es medible
- Si $\mathcal{T}$ tiene una subbase numerable $\mathcal{S}$:

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(S) \in \mathcal{A} \quad \forall S \in \mathcal{S}$$

Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $f : \Omega \to [0, \infty]$. Equivalen:

(i) f es medible

(ii) $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iii) $\{x \in \Omega : f(x) \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

(iv) $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

(v) $\{x \in \Omega : f(x) \leqslant \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

Consecuencias

$\{f_n\}$ medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \text{ínf}\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_3(x) = \limsup\limits_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$
- $g_4(x) = \liminf\limits_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$

Por tanto: $\{f_n(x)\} \to f(x) \ \ \forall x \in \Omega \implies f$ medible

Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Función simple positiva: $s : \Omega \to [0, \infty[$ medible con $s(\Omega)$ finito

Descomposición canónica:

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \infty$$

$$A_k := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \ , \ A_k \cap A_j = \emptyset \quad (k \neq j) \ , \ s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$$

Recíprocamente:

$$B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{A}, \quad \beta_1, \ldots, \beta_m \in [0, \infty[\quad \Rightarrow \quad t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j} \ \text{ simple positiva}$$

Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f:\Omega\to[0,\infty] \text{ medible},\ \ n\in\mathbb{N}$$

$$F_n=\{x\in\Omega: f(x)\geqslant n\}\in\mathcal{A}$$

$$E_{nk}=\left\{x\in\Omega:\frac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\frac{k}{2^n}\right\}\in\mathcal{A}\quad (k=1,2,\ldots,n2^n)$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{nk}}+n\chi_{F_n}$$

- $s_n(x)\leqslant s_{n+1}(x)\quad\forall x\in\Omega$
- $\{s_n(x)\}\to f(x)\quad\forall x\in\Omega$
- $\sup f(\Omega)<\infty$ convergencia uniforme

Consecuencia

f,g medibles, $\alpha\in[0,\infty]$, $p\in\mathbb{R}^+\ \Rightarrow\ f+g,\ \alpha f,\ fg,\ f^p$ medibles

Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k} \qquad \int_E s\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

$$s,t \quad \text{simples}, \; s(x) \leqslant t(x) \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E s\, d\mu \leqslant \int_E t\, d\mu$$

$$\int_E s\, d\mu = \text{máx}\left\{ \int_E t\, d\mu : t \ \text{simple}, t \leqslant s \right\}$$

Integral de una función medible positiva

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

$$\int_E f\, d\mu = \sup\left\{ \int_E s\, d\mu : s \ \text{simple} \ s \leqslant f \right\}$$

Propiedades de la integral (1)

Primeras propiedades

- $f : \Omega \to [0,\infty]$ medible $\Rightarrow \displaystyle\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$
- $f : \Omega \to [0,\infty]$ medible, $\alpha \in [0,\infty] \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega \alpha f\,d\mu = \alpha \int_\Omega f\,d\mu$
- $f, g : \Omega \to [0,\infty]$ medibles, $f \leqslant g \Rightarrow \displaystyle\int_\Omega f\,d\mu \leqslant \int_\Omega g\,d\mu$

Teorema de la convergencia monótona

Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles positivas en Ω y sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$. Entonces:

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,d\mu$$

Propiedades de la integral (2)

Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

- $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible. Integral indefinida:

$$\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f \, d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

  φ es una medida y, para $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega g \, d\varphi = \int_\Omega g \, f \, d\mu$$

- Lema de Fatou: $\{f_n\}$ sucesión de funciones medibles positivas en Ω:

$$\int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu$$

Propiedades de la integral (3)

Valores extremos de la integral

$f : \Omega \to [0, \infty]$ medible:

$$\int_\Omega f \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}\big) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_\Omega f \, d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}\big) = 0 \quad (f < \infty \text{ c.p.d.})$$

Desigualdades de Hölder y Minkowski

$f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$:

$$\int_\Omega f \, g \, d\mu \leqslant \left(\int_\Omega f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_\Omega g^{p^*} \, d\mu \right)^{1/p^*}$$

$$\left(\int_\Omega (f+g)^p \, d\mu \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_\Omega f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega g^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

Tema 3: Espacios L_p

13 de abril de 2010

1. Funciones medibles

2. Espacios L_p

3. Funciones integrables

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \qquad \big(\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C})\big)$$

Dos observaciones

- Una función continua de una función medible es medible
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x) = (u(x), v(x)) \;\; \forall x \in \Omega$. Entonces:

$$f \;\text{ medible } \iff u, v \;\text{ medibles}$$

Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible $\iff$ $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f+g, fg \in \mathcal{L}_0(\mu)$ (álgebra sobre $\mathbb{K}$)
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu),\ p \in \mathbb{R}^+ \implies |f|^p$ medible positiva
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^-$ medibles positivas
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies \exists\ \alpha \in \mathcal{L}_0(\mu)$:
$$|\alpha(x)| = 1,\ f(x) = \alpha(x)\,|f(x)| \quad (x \in \Omega)$$
- $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}_0(\mu),\ \{f_n(x)\} \to f(x)\ \ \forall x \in \Omega \implies f \in \mathcal{L}_0(\mu)$

Espacios L_p

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $p \in [0, \infty]$:

$p = 0$ Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$ Funciones p-integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

$p = \infty$ Funciones esencialmente acotadas:

$$f \in \mathcal{L}_0(\mu), \quad \text{ess sup}\,|f| = \text{mín}\{M \in [0, \infty] : |f| \leqslant M \text{ c.p.d.}\}$$

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \text{ess sup}\,|f| < \infty\}$$

Caso $1 \leqslant p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_p seminorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$\nu_p(f) = 0 \iff f \in N(\mu) := \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : f = 0 \text{ c.p.d.}\} \subseteq \mathcal{L}_p(\mu)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \quad (f \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$ espacio normado

Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \text{ess sup}\,|f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

$\mathcal{L}_\infty(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_∞ seminorma en $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup}\,|f| \quad (f \in L_\infty(\mu))$$

$L_\infty(\mu)$ espacio normado

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \quad \Longrightarrow \quad (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

ν_p es una pseudonorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \lceil f \rceil_p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

$$d_p(f,g) = \lceil f - g \rceil_p = \int_\Omega |f-g|^p \, d\mu \quad (f, g \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$ espacio métrico

Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

$$\nu_0(f) = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

ν_0 es una pseudonorma en $\mathcal{L}_0(\mu)$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu)/N(\mu) \quad \lceil f \rceil_0 = \nu_0(f) \quad (f \in L_0(\mu))$$

$$d_0(f,g) = \lceil f - g \rceil_0 \quad (f,g \in L_0(\mu))$$

$L_0(\mu)$ espacio métrico

Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ $\quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$

- $f \in L_p(\mu) \quad \Longrightarrow \quad |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu),\ |f| \in L_p(\mu) \quad \Longrightarrow \quad f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real: $L_p(\mu,\mathbb{C}) = L_p(\mu,\mathbb{R}) \oplus i\,L_p(\mu,\mathbb{R})$
- $L_p(\mu,\mathbb{R})$ retículo vectorial:

$$f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad \mu\big(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}\big) = 0 \quad (f \leqslant g \ \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \quad \Longrightarrow \quad f \vee g,\ f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

$$[f \vee g](x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}, \quad [f \wedge g](x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} \quad \text{c.p.d.}$$

$$f \in L_p(\mu,\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad f^+, f^- \in L_p(\mu)$$

$$f^+ = f \vee 0; \quad f^- = -(f \wedge 0); \quad f = f^+ - f^-; \quad |f| = f^+ + f^-$$

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu\right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

  $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \iff \lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0 \ \ \forall \varepsilon > 0$

Implicaciones (μ finita)

- $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ c.p.d. $\implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \implies \{f_{\sigma(n)}\} \to f$ c.p.d.

Teorema de Riesz-Fisher

- $L_p(\mu)$ es un espacio de Banach $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$
- $L_p(\mu)$ es un espacio métrico completo $(0 \leqslant p < 1)$

Integral

Para $f \in L_1(\mu)$:

$$\int_\Omega f\,d\mu \;=\; \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^+\,d\mu - \int_\Omega (\operatorname{Re} f)^-\,d\mu + i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^+\,d\mu - i\int_\Omega (\operatorname{Im} f)^-\,d\mu$$

$$\int_E f\,d\mu = \int_\Omega f\chi_E\,d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener $\displaystyle\int_E |f|\,d\mu < \infty$

Propiedades

$I : L_1(\mu) \to \mathbb{K}, \quad I(f) = \displaystyle\int_\Omega f\,d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$

- Lineal
- Continuo:

$$|I(f)| = \left|\int_\Omega f\,d\mu\right| \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mu = \|f\|_1$$

- Positivo:

$$f \in L_1(\mu,\mathbb{R}),\; f \geqslant 0 \implies \int_\Omega f\,d\mu \geqslant 0$$

Teorema de la convergencia dominada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que:

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se verifica que:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \right\} \to 0$$

En particular, $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y

$$\left\{ \int_\Omega f_n \, d\mu \right\} \to \int_\Omega f \, d\mu$$

Si hubiéramos supuesto que $g \in \mathcal{L}_p(\mu)$, con $0 < p < \infty$, hubiéramos obtenido:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right\} \to 0$$

y en particular $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$.

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \infty\} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

- Para $0 \leqslant p < \infty$, $S(\mu)$ es denso en $L_p(\mu)$

¿$p = \infty$?

Funciones simples:

$$\tilde{S}(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A}\}$$

- $\tilde{S}(\mu)$ es denso en $L_\infty(\mu)$

Tema 4: Teorema de Fubini

22 de abril de 2010

1. Producto de medidas
   - Producto de espacios medibles
   - Medida producto
   - Caso de $\mathbb{R}^n$

2. Teorema de Fubini
   - Para funciones positivas
   - Aplicaciones
   - Para funciones integrables

Producto de σ-álgebras

σ-álgebra producto

$(X,\mathcal{A}), (Y,\mathcal{B})$ espacios medibles

Rectángulos medibles: $\mathcal{A}\times\mathcal{B} = \{A\times B : A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\}$

σ-álgebra producto: $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ = σ-álgebra engendrada por $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$

Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$ σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{B}_n\otimes\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k}$
- $\mathcal{M}_n$ σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$: $\mathcal{M}_n\otimes\mathcal{M}_k \subsetneqq \mathcal{M}_{n+k}$
- X numerable $\implies$ $\mathcal{P}(X)\otimes\mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X\times Y)$
- $\mathcal{P}(X)\otimes\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X\times X)$ $\implies$ $\operatorname{card} X \leqslant \operatorname{card}\mathbb{R}$

Propiedades de la σ-álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

$$X, Y, Z \text{ conjuntos}, \quad E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- Sección de E por un $x \in X$: $\quad E_x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$
- Sección de E por un $y \in Y$: $\quad E^y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$
- Sección de f por un $x \in X$: $\quad f_x : Y \to Z, \quad f_x(y) = f(x,y) \quad (y \in Y)$
- Sección de f por un $y \in Y$: $\quad f^y : X \to Z, \quad f^y(x) = f(x,y) \quad (x \in X)$

Propiedades de la σ-álgebra producto

$$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C}) \text{ espacios medibles}$$

$$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \text{ espacio medible producto}$$

$$E \subset X \times Y, \quad f : X \times Y \to Z$$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X, \quad E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y$

  Las secciones de conjuntos medibles son medibles
- f medible $\implies f_x$ medible $\forall x \in X, \ f^y$ medible $\forall y \in Y$

  Las funciones medibles son separadamente medibles

Producto de medidas

Existencia de medidas producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu)\ \text{ espacios de medida}$$

Existen medidas $\varphi : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ verificando que

$$\varphi(A\times B)=\mu(A)\,\nu(B) \quad \forall A\in\mathcal{A},\ \forall B\in\mathcal{B}$$

Medida σ-finita

$(X,\mathcal{A},\mu)$ espacio de medida σ-finita cuando:

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \quad \text{con} \quad A_n\in\mathcal{A},\ \mu(A_n)<\infty \ \ \forall n\in\mathbb{N}$$

Existencia y unicidad de la medida producto

$$(X,\mathcal{A},\mu)\,,\ (Y,\mathcal{B},\nu)\ \text{ espacios de medida σ-finita}$$

Existe una única medida $\mu\otimes\nu : \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to [0,\infty]$ verificando que

$$[\mu\otimes\nu](A\times B)=\mu(A)\,\nu(B) \quad \forall A\in\mathcal{A},\ \forall B\in\mathcal{B}$$

$\mu\otimes\nu$ medida producto, $(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu)$ espacio de medida producto

Completación de una medida

Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida completo cuando:

$$B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0,\ N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida μ es completa

Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\ N \subset B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0\}$$

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \overline{\mathcal{A}})$$

- $\overline{\mathcal{A}}$ es una σ-álgebra y $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$
- $\overline{\mu}$ está bien definida, es una medida y extiende a μ
- El espacio de medida $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es completo
- Si $(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ es un espacio de medida completo,

$$\mathcal{A} \subset \widetilde{A},\ \widetilde{\mu}\big|_{\mathcal{A}} = \mu \implies \overline{\mathcal{A}} \subset \widetilde{A},\ \widetilde{\mu}\big|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}$$

$(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ es la completación de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, y $\overline{\mu}$ la completación de la medida μ

Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

Relación entre ambas medidas

$$\mathcal{M}_n \quad \sigma\text{-álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\lambda_n : \mathcal{M}_n \to [0,\infty] \text{ medida de Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{B}_n \quad \sigma\text{-álgebra de Borel de } \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$$

$$\beta_n = \lambda_n\big|_{\mathcal{B}_n}, \text{ medida de Borel-Lebesgue en } \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$ es la completación del espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$.

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \ \mu(A) = 0$
- $\exists E \subset Y : E \notin \mathcal{B}$

Entonces la medida producto $\mu \otimes \nu$ no es completa

$\lambda_n \otimes \lambda_k$ no es completa

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneqq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneqq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además, λ_{n+k} extiende a $\lambda_n \otimes \lambda_k$, que a su vez extiende a β_{n+k}
- De hecho:

$$(\mathbb{R}^{n+k}, \mathcal{M}_{n+k}, \lambda_{n+k}) = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \overline{\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k}, \overline{\lambda_n \otimes \lambda_k})$$

Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu)$ espacio de medida producto

Teorema

Para $f: X\times Y\to[0,\infty]$ medible, definimos:

$$\phi: X\to[0,\infty],\quad \phi(x)=\int_Y f_x\,d\nu=\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\quad \forall x\in X$$

$$\psi: Y\to[0,\infty],\quad \psi(y)=\int_X f^y\,d\mu=\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\quad \forall y\in Y$$

Entonces ϕ y ψ son medibles y se verifica que:

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu)=\int_X \phi\,d\mu=\int_Y \psi\,d\nu$$

Con notación más sugerente:

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu)=\int_X\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\;d\mu(x)=\int_Y\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\;d\nu(y)$$

Cálculo de la medida producto

$$(X,\mathcal{A},\mu),\ (Y,\mathcal{B},\nu) \text{ espacios de medida } \sigma\text{-finita}$$

$$(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu) \text{ espacio de medida producto}$$

Cálculo de la medida producto

Para $E\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, definimos:

$$\phi : X \longrightarrow [0,\infty], \quad \phi(x)=\nu(E_x) \quad \forall x\in X$$
$$\psi : Y \longrightarrow [0,\infty], \quad \psi(y)=\mu(E^y) \quad \forall y\in Y$$

Entonces ϕ,ψ son medibles y se tiene

$$[\mu\otimes\nu](E) = \int_X \phi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu$$

Con notación más sugerente:

$$[\mu\otimes\nu](E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y)$$

La integral como medida

La integral como medida

$$(X, \mathcal{A}, \mu) \text{ espacio de medida } \sigma\text{-finita}$$

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta) \text{ medida de Borel-Lebesgue}$$

Para $f : X \to [0, \infty[$, definimos

$$S(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

Entonces, f es medible si, y sólo si, $S(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, en cuyo caso,

$$\int_X f \, d\mu = [\mu \otimes \beta]\big(S(f)\big)$$

Teorema de Hobson-Tonelli

$(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita

$(X\times Y,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mu\otimes\nu)$ espacio de medida producto

Teorema de Hobson-Tonelli

Para $f: X\times Y\to\mathbb{K}$ medible, son equivalentes:

(1) $f\in\mathcal{L}_1(\mu\otimes\nu)$

(2) $\displaystyle\int_X\int_Y |f(x,y)|\,d\nu(y)\;d\mu(x)<\infty$

(3) $\displaystyle\int_Y\int_X |f(x,y)|\,d\mu(x)\;d\nu(y)<\infty$

Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita y $f \in \mathcal{L}_1(\mu\otimes\nu)$.
Existen conjuntos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que:

$$\mu(X\setminus A) = 0\,, \quad f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \quad \forall x \in A$$
$$\nu(Y\setminus B) = 0\,, \quad f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \quad \forall y \in B$$

Además, definiendo

$$\phi(x) = \int_Y f_x\, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad \forall x \in A\,, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x \in X\setminus A$$
$$\psi(y) = \int_X f^y\, d\mu = \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \quad \forall y \in B\,, \quad \psi(y) = 0 \quad \forall y \in Y\setminus B$$

se tiene que $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$ y

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \phi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu$$

Todo ello se resume de nuevo en la expresión:

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\otimes\nu) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\ d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\ d\nu(y)$$

Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita y completa.
Para $f \in \mathcal{L}_1(\overline{\mu\otimes\nu})$, se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$
$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Además, las funciones ϕ y ψ definidas c.p.d. mediante:

$$\phi(x) = \int_Y f_x\, d\nu = \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \quad \text{para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$
$$\psi(y) = \int_X f^y\, d\mu = \int_X f(x,y)\, d\mu(x) \quad \text{para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

verifican que $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$ y

$$\int_{X\times Y} f\, d(\overline{\mu\otimes\nu}) = \int_X \phi\, d\mu = \int_Y \psi\, d\nu$$

Podemos de nuevo escribir:

$$\int_{X\times Y} f\, d(\overline{\mu\otimes\nu}) = \int_X \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\ d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y)\, d\mu(x)\ d\nu(y)$$

Tema 5: Teorema de Radon-Nikodỳm

27 de abril, 3 y 6 de mayo de 2010

1. TRN para medidas positivas

2. Medidas reales o complejas

3. TRN para medidas reales o complejas

Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega,\mathcal{A},\lambda)$ espacio de medida, $f:\Omega\to[0,\infty]$ medible

Integral indefinida de f:

$$\varphi:\mathcal{A}\to[0,\infty],\quad \varphi(E)=\int_E f\,d\lambda \quad (E\in\mathcal{A})$$

φ es una medida y, para $g:\Omega\to[0,\infty]$ medible,

$$\int_\Omega g\,d\varphi=\int_\Omega g\,f\,d\lambda$$

Escribimos:

$$d\varphi = f\,d\lambda$$

Relación entre λ y μ:

$$E\in\mathcal{A},\ \lambda(E)=0 \implies \varphi(E)=0$$

Decimos que φ es absolutamente continua con respecto a λ: $\varphi\ll\lambda$

La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ otra medida

¿Existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f\, d\lambda$?

Condición obviamente necesaria: $\mu \ll \lambda$ ¿Es suficiente?

En general NO: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ conjuntos medibles Lebesgue, λ número de elementos, μ medida de Lebesgue

Teorema de Radon-Nikodỳm para medidas positivas

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una medida absolutamente continua con respecto a λ:

$$E \in \mathcal{A},\ \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Entonces existe una función medible $f : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $d\mu = f\, d\lambda$:

$$\mu(E) = \int_E f\, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$. Integral indefinida de f:

$$\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}, \quad \mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

μ es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

μ es combinación lineal de medidas (positivas):

$$\mu(E) = \int_E (\operatorname{Re} f)^+ \, d\lambda - \int_E (\operatorname{Re} f)^- \, d\lambda + i \int_E (\operatorname{Im} f)^+ \, d\lambda - i \int_E (\operatorname{Im} f)^- \, d\lambda$$

Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible

Medida real o compleja: aplicación $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ que es σ-aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset\ (n \neq m) \quad \Longrightarrow \quad \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones: $\mu(\emptyset) = 0$ y, más importante, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación: $M(\mathcal{A})$ medidas reales o complejas definidas en $\mathcal{A}$, espacio vectorial.
$M^+(\mathcal{A})$ medidas positivas y finitas

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

$M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ espacio vectorial ordenado: $\mu_1 \leqslant \mu_2 \ \Leftrightarrow \ \mu_2 - \mu_1 \in M^+(\mathcal{A})$

¿Es $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ un retículo vectorial?
¿Podemos definir coherentemente el valor absoluto de una medida real o incluso el módulo de una medida compleja?

Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$ medida real o compleja. Para $E \in \mathcal{A}$ escribimos:

$$\Pi(E) = \left\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \,,\; A_n \in \mathcal{A} \;\forall n \in \mathbb{N},\; A_n \cap A_m = \emptyset \;(n \neq m) \right\}$$

Entonces:

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\} \in \Pi(E) \right\} \quad (E \in \mathcal{A})$$

$|\mu| : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es la variación de la medida μ

Teorema (la propiedad clave de la variación)

La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita:

$$\mu \in M(\mathcal{A}) \quad \Longrightarrow \quad |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$$

Propiedades de retículo

- Si $\mu \in M(\mathcal{A})$ y $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ medida positiva,

$$|\mu(E)| \leqslant \nu(E) \;\; \forall E \in \mathcal{A} \;\; \Longrightarrow \;\; |\mu|(E) \leqslant \nu(E) \; \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\quad |\mu| = \sup\{\operatorname{Re}(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\quad |\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$
- $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ es un retículo vectorial:

$$\mu \vee \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|)\,; \;\; \mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|)$$

- Descomposición de Jordan de una medida real:

$$\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \;\Longrightarrow\; \begin{cases} \mu^{+} = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) = \mu \vee 0 \\ \mu^{-} = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu) = -(\mu \wedge 0) \end{cases}$$

Propiedades:

$$\mu^{+}, \mu^{-} \in M^{+}(\mathcal{A}), \quad \mu = \mu^{+} - \mu^{-}, \quad |\mu| = \mu^{+} + \mu^{-}$$

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 \;\; \text{con} \;\; \mu_1, \mu_2 \in M^{+}(\mathcal{A}) \;\; \Longrightarrow \;\; \mu^{+} \leqslant \mu_1\,, \; \mu^{-} \leqslant \mu_2$$

Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega), \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

se obtiene una norma en $M(\mathcal{A})$, "Variación total"

Otra norma natural:

$$\|\mu\|_\infty = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} \qquad \big(\mu \in M(\mathcal{A})\big)$$

Ambas normas son equivalentes

$$\|\mu\|_\infty \leqslant \|\mu\| \leqslant 4\,\|\mu\|_\infty \qquad \big(\lambda \in M(\mathcal{A})\big)$$

Y ambas son completas. $M(\mathcal{A})$ espacio de Banach con la norma de la variación total

Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $\mu \in M(\mathcal{A})$. $\mu \ll \lambda$ cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \quad \lambda(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) < \delta \; \Longrightarrow |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación: $\mu \ll \lambda \quad \Longleftrightarrow \quad |\mu| \ll \lambda$

Teorema de Radon-Nikodỳm

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu \in M(\mathcal{A})$ una medida absolutamente continua con respecto a λ:

$$E \in \mathcal{A}, \; \lambda(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = 0$$

Entonces existe una única $f \in L_1(\lambda)$ tal que μ es la integral indefinida de f, es decir,

$$\mu(E) = \int_E f \, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida σ-finita, $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda : E \in \mathcal{A}, \ 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces $\lambda\big(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}\big) = 0 \quad \big(f(x) \in \overline{R(f)}$ p.c.t. $x \in \Omega\big)$

Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A})$. Existe $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \ \ \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \mu(E) = \int_E h \, d|\mu| \ \ \forall E \in \mathcal{A}$$

h está determinada $|\mu|$-c.p.d. "Descomposición polar"

Integral asociada a una medida real o compleja:

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f \, h \, d|\mu| \quad \big(f \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A}\big)$$

Simbólicamente: $d\mu = h \, d|\mu|$

Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$, descomposición polar $d\mu = h\,d|\mu|$

$h(x) \in \{-1, 1\}\ \forall x \in \Omega$, (signo de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}\,; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par (A^+, A^-) es una descomposición de Hahn de la medida real μ

- $\Omega = A^+ \cup A^-$, $A^+ \cap A^- = \emptyset$,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ \ \Rightarrow \ \mu(E) \geqslant 0 \\ E \subseteq A^- \ \Rightarrow \ \mu(E) \leqslant 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $|\mu|(E) = \mu(E \cap A^+) - \mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $\mu^+(E) = \mu(E \cap A^+)$, $\mu^-(E) = -\mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- Unicidad: si (B^+, B^-) es otra descomposición de Hahn,

$$|\mu|\big[(A^+ \setminus B^+) \cup (B^+ \setminus A^+)\big] = |\mu|\big[(A^- \setminus B^-) \cup (B^- \setminus A^-)\big] = 0$$

Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ espacio de medida, $f \in L_1(\lambda)$, $\mu(E) = \int_E f\, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$

- $\mu \in M(\mathcal{A}), \quad \mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f|\, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$
- Descomposición polar: tomando $h : \Omega \to \mathbb{K}$ medible, tal que $|h(x)| = 1$ y $f(x) = h(x)|f(x)|$ para casi todo $x \in \Omega$, se tiene $d\mu = h\, d|\mu|$
- Integral asociada a μ:

  $$\int_E g\, d\mu = \int_E g\, f\, d\lambda \quad \big(g \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A}\big)$$

  De hecho, $L_1(|\mu|) = \{g \in L_0(\mu) : gf \in L_1(\lambda)\}$
- Si $f \in L_1(\mu, \mathbb{R})$:

  $$\begin{cases} \text{Jordan: } \mu^+(E) = \int_E f^+\, d\lambda, \quad \mu^-(E) = \int_E f^-\, d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A} \\ \text{Hahn: } \quad A^+ = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant 0\}, \quad A^- = \{x \in \Omega : f(x) < 0\} \end{cases}$$

Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$ espacio medible, μ medida en $\mathcal{A}$ (positiva, real o compleja), $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu \text{ concentrada en } A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geqslant 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

μ_1 y μ_2 son ortogonales (o mutuamente singulares) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \Leftrightarrow \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \ \mu_k \text{ concentrada en } A_k, k = 1, 2$$

Descomposición de Lebesgue

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita y $\mu \in M(\mathcal{A})$. Entonces μ admite una única descomposición de la forma $\mu = \mu_a + \mu_s$ donde $\mu_a \ll \lambda$ y $\mu_s \perp \lambda$

Resumen

Sea $(\Omega,\mathcal{A})$ un espacio medible, $M(\mathcal{A})$ el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en $\mathcal{A}$ y $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geqslant 0\ \forall E \in \mathcal{A}\}$

(1) La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y finita: $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$

(2) $M(\mathcal{A})$ es un espacio de Banach con la norma de la variación total: $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ $(\mu \in M(\mathcal{A})$. La convergencia es la uniforme en $\mathcal{A}$

(3) $M(\mathcal{A},\mathbb{R})$, con el orden natural, es también un retículo vectorial

Fijada ahora una medida σ-finita $\lambda : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ consideramos dos subespacios de $M(\mathcal{A})$: $M_a(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \ll \lambda\}$ y $M_s(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \perp \lambda\}$

(4) Se verifica que $M(\mathcal{A}) = M_a(\lambda) \oplus M_s(\lambda)$, suma topológico-directa, ya que $\|\mu+\nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$ para cualesquiera $\mu \in M_a(\lambda)$ y $\nu \in M_s(\lambda)$

(5) Para $f \in L_1(\lambda)$ sea $T(f)$ su integral indefinida:

$$[T(f)](E) = \int_E f\, d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

Entonces T es una biyección lineal isométrica de $L_1(\lambda)$ sobre $M_a(\lambda)$. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, T es también un isomorfismo de retículos

Tema 6: Teorema de Representación de Riesz

10 y 13 de mayo de 2010

1. Funcionales lineales positivos
2. Regularidad de medidas de Borel
3. Funcionales lineales continuos

Funciones continuas de soporte compacto

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto

$C_{00}(L)$: funciones de L en $\mathbb{K}$, continuas, de soporte compacto

$$\operatorname{sop} f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$: σ-álgebra de Borel de L

Las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ son medibles

$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ medida de Borel finita en compactos:

$$K \subseteq L, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente, μ es localmente finita

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

Funcionales lineales positivos

$$\Phi_\mu(f) = \int_L f \, d\mu \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\Phi_\mu : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), \; f \geqslant 0 \implies \Phi_\mu(f) \geqslant 0$$

¡El recíproco también es cierto!: Todo funcional lineal positivo es una integral

Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

Teorema

Sea L un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y $\Phi : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L),\ f(t) \geqslant 0 \ \ \forall t \in L \implies \Phi(f) \geqslant 0$$

Entonces existe una única medida de Borel $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ verificando:

(1) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto},\ E \subseteq U \subseteq L\} \quad (E \in \mathcal{B})$

(2) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto},\ K \subseteq U\} \quad (U \subseteq L,\ U \text{ abierto})$

(3) μ es localmente finita

(4) $\Phi(f) = \int_L f\, d\mu \quad \big(f \in C_{00}(L)\big)$

Medidas de Borel regulares

X Hausdorff, $\mathcal{B}$ σ-álgebra de Borel, $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ medida de Borel, $E \in \mathcal{B}$,

- E regular exterior para μ: $\mu(E) = \text{ínf}\{\mu(U) : U \text{ abierto}, \ E \subseteq U \subseteq L\}$
- E regular interior para μ: $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, \ K \subseteq E\}$
- μ regular exterior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular exterior para μ
- μ regular interior: todo $E \in \mathcal{B}$ es regular interior para μ
- regular = regular exterior e interior
- Medida de Radon: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

Algunas observaciones

- Si μ es una medida de Radon, todo conjunto de Borel $E \in \mathcal{B}$ que verifique $\mu(E) < \infty$ es regular interior para μ. Por tanto, toda medida de Radon finita es regular
- Si X es σ-compacto, toda medida de Borel positiva en X, regular exterior y localmente finita es regular
- Si X es localmente compacto y todo abierto de X es unión numerable de compactos, entonces toda medida de Borel positiva y localmente finita en X es regular

Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Radon μ en L que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

TRR, caso σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y σ-compacto, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en L, regular exterior y localmente finita, que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho, μ es regular

TRR, caso compacto

Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea Φ un funcional lineal positivo en $C(K)$. Entonces existe una única medida de Borel μ en K, regular exterior y finita, que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

Teorema de representación de Riesz, caso localmente σ-compacto

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y tal que todo subconjunto abierto de L puede obtenerse como unión numerable de compactos, y sea Φ un funcional lineal positivo en $C_{00}(L)$. Entonces existe una única medida de Borel localmente finita μ en L que verifica

$$\int_K f\,d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho μ es regular

Consecuencias de la regularidad

Teorema de Lusin

Sea μ una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L y sea $f : L \to \mathbb{K}$ una función medible verificando:

$$\mu\big(\{t \in L : f(t) \neq 0\}\big) < \infty$$

Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $g \in C_{00}(L)$ verificando:

$$\mu\big(\{t \in L : f(x) \neq g(x)\}\big) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g\|_\infty \leqslant \sup\{|f(t)| : t \in L\}$$

Corolario importante

Si μ es una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto L, entonces $C_{00}(L)$ es denso en $L_p(\mu)$ para $0 < p < \infty$

Motivación

L espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,
$C_{00}(L)$ espacio normado con

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in L\} \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$ medida de Borel real o compleja

λ será regular cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B},\ \varepsilon > 0 \implies \exists\ K, U\ :\ \begin{cases} K \text{ compacto},\ U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq\ U \subseteq L \ \text{ y } \ |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

Subespacio cerrado de $M(\mathcal{B})$, luego espacio de Banach con la norma

$$\|\lambda\| = |\lambda|(L) \qquad \big(\lambda \in M(L)\big)$$

$\lambda \in M(L) \ \Rightarrow\ C_{00}(L) \subseteq \mathcal{L}_1(|\lambda|)$ y podemos definir $\Phi_\lambda : C_{00}(L) \to \mathbb{K}$ por

$$\Phi_\lambda(f) = \int_L f\, d\lambda \qquad \big(f \in C_{00}(L)\big)$$

Φ_λ es lineal, puede no ser positivo, pero es continuo: $\Phi_\lambda \in C_{00}(L)^*$

Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

X, Y espacios normados, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $T : X \to Y$ lineal. Equivalen:

(1) T es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall x \in X$

(3) T está acotado en B_X

Norma de operadores

X, Y espacios normados,
$L(X,Y)$ espacio vectorial de los operadores lineales continuos de X en Y.

$$\|T\| = \min\{M \geqslant 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|,\ \forall x \in X\} = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\}$$

$$= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}$$

Norma de operadores. $L(X,Y)$ espacio normado, espacio de operadores
Convergencia en $L(X,Y)$ $=$ Convergencia uniforme en B_X
Y completo $\implies$ $L(X,Y)$ completo

Dual de un espacio normado

Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

X espacio normado, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, $f : X \to \mathbb{K}$ lineal. Equivalen:

(1) f es continuo

(2) $\exists M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\,\|x\|,\ \forall x \in X$

(3) f está acotado en B_X

(4) $\ker f$ es cerrado en X

Norma dual

X espacio normado, X^* funcionales lineales continuos en X, espacio de Banach.

$$\|f\| = \text{mín}\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\|,\ \forall x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$$

Norma dual. X^* espacio dual de X

Para espacios X concretos, es útil tener descripciones concretas de X^*

Teorema de representación de Riesz

Sea L un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \equiv M(L)$$

Más concretamente, un isomorfismo isométrico Ψ de $M(L)$ sobre $C_{00}(L)^*$ viene dado por:

$$[\Psi(\lambda)](f) = \int_L f\,d\lambda \qquad \big(f \in C_{00}(L), \lambda \in M(L)\big)$$

Caso compacto

$$C(K)^* \equiv M(K)$$

Ejemplo

Fijada $g \in L_1[0,1]$, para $f \in C[0,1]$ se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

Es claro que $\varphi \in C[0,1]^*$. De hecho tenemos

$$\|\varphi\| = \int_0^1 |g(t)|\, dt = \|g\|_1$$

Obsérvese que estamos viendo

$$L_1[0,1] \subseteq M[0,1] \equiv C[0,1]^*$$

Tema 7: Espacios Vectoriales Topológicos

17 y 20 de mayo de 2010

Preliminares algebraicos

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

$\Lambda \subset \mathbb{K}, \ \ \alpha \in \mathbb{K}, \ \ A, B \subset X, \ \ x \in X,$

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \qquad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \qquad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- A subespacio de $X \iff \mathbb{K}A + A \subset A$
- A convexo $\iff (1-\rho)A + \rho A \subset A \ \ \forall \rho \in [0,1]$

Conjuntos absorbentes y equilibrados

- $A \subset X$ es absorbente cuando $X = \mathbb{R}^+ A$
- $B \subset X$ es equilibrado cuando $\mathbb{D}B = B$, donde $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant 1\}$
  Para $A \subset X$, $\mathbb{D}A$ es la envolvente equilibrada de A

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \to X, \quad (x,y) \mapsto x+y \quad (x,y \in X)$
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)
EVT $=$ espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Propiedad inmediata: homogeneidad

X EVT, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ con $\lambda_0 \neq 0$ y $x_0 \in X$. La aplicación $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X.
Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

$$\mathcal{B} \text{ base de entornos de cero en } X$$
$$\Downarrow$$
$$\{x+B : B \in \mathcal{B}\} \text{ base de entornos de cada } x \in X$$

La topología de X queda determinada por $\mathcal{B}$
¿Cómo son las bases de entornos de cero para una topología vectorial?

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D} V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Definición constructiva de EVT

X espacio vectorial, $\mathcal{B}$ familia de subconjuntos de X verificando:

(a) $\forall U, V \in \mathcal{B} \;\; \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$

(b) $U \in \mathcal{B} \implies U$ absorbente

(c) $U \in \mathcal{B} \implies U$ equilibrado

(d) $\forall U \in \mathcal{B} \;\; \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$

Entonces existe una (única) topología vectorial en X para la cual $\mathcal{B}$ es base de entornos de cero

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ pseudonorma cuando:

$$(1)\quad \nu(x+y) \leqslant \nu(x)+\nu(y) \quad \forall x,y \in X$$

$$(2)\quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una seminorma verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X$, luego toda seminorma es una pseudonorma

Topología asociada a una pseudonorma

X espacio vectorial, ν pseudonorma en X,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$$

La familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en X, la topología asociada a la pseudonorma ν, con la que X es un EVT pseudonormable (seminormable cuando ν es una seminorma)

Definiendo $\delta(x,y) = \nu(x-y)$ para $x,y \in X$, se obtiene una semidistancia que genera la misma topología.

Seminormable $\implies$ Pseudonormable $\implies$ Semimetrizable

Uso de los entornos de cero

X EVT, $\mathcal{B}$ base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cero cerrados
- X es un espacio topológico regular
- Los axiomas de separación $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ son equivalentes para X. EVT separado
- X separado $\iff$ $\{0\}$ cerrado
- Un espacio pseudonormable es separado cuando su pseudonorma ν es total: $x \in X,\ \nu(x) = 0 \implies x = 0$

seminorma total $=$ norma

Continuidad uniforme

X, Y EVT, $A \subset X$, $f : A \to Y$

f es uniformemente continua (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U, entorno de 0 en X, tal que:

$$a, b \in A, \ a - b \in U \quad \Rightarrow \quad f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que X e Y sean pseudonormables

Continuidad de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ operador lineal. Equivalen:

(i) T es uniformemente continuo en X

(ii) T es continuo en X

(iii) T es continuo en 0

$L(X, Y)$ operadores lineales continuos

Redes

- Conjunto dirigido: $\Lambda \neq \emptyset$ con relación binaria $\leqslant$, reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \ \ \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leqslant \lambda, \ \lambda_2 \leqslant \lambda$$

  Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por "contención"

- Red en un conjunto X: Aplicación $\varphi : \Lambda \to X$, con Λ dirigido. Notación: $x_\lambda = \varphi(\lambda)$, $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$. Ejemplo: sucesión
- Red convergente: X espacio topológico, $\{x_\lambda\}$ red en X, $x \in X$:

$$\{x_\lambda\} \to x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \ \ \exists \lambda_0 \in \Lambda : \{x_\lambda : \lambda_0 \leqslant \lambda\} \subset U$$

- Las redes convergentes caracterizan la topología:

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{a_\lambda\} \ : \ a_\lambda \in A \ \ \forall \lambda \in \Lambda, \ \{a_\lambda\} \to x$$

- Ejemplo: En todo EVT, el cierre de un subespacio es un subespacio

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \ \Rightarrow \ d\left(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}\right) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \ \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant \lambda_0 \ \Rightarrow \ x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Conjuntos completos

X EVT, $E \subset X$. E completo cuando toda red de Cauchy en E converge a un punto de E.

Uso de la complitud

- E completo, $F = \overline{F} \cap E \quad \Rightarrow \quad F$ completo
- X separado, $X \supset E$ completo $\quad \Rightarrow \quad E = \overline{E}$
- Todo EVT se puede completar
- Extensión de funciones: X, Y EVT, Y separado y completo, $M \subset X$ subespacio denso, $T \in L(M, Y)$. Existe única extensión $\widetilde{T} \in L(X, Y)$. Por tanto $L(M, Y) \equiv L(X, Y)$

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \ \text{precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \ \text{precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \ \exists F \ \text{finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A precompacto $\implies$ $\overline{A}$ precompacto
- A precompacto, f uniformemente continua $\implies$ $f(A)$ precompacto

Caracterización de la compacidad

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \text{compacto} \iff A \ \text{precompacto y completo}$$

Por tanto, si X es completo,

$$A \ \text{precompacto} \iff A \ \text{relativamente compacto}$$

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

$$A \ \ \text{acotado} \ \iff \ \forall U \ \text{ entorno de cero en } X, \ \exists\, \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν:

$$A \ \ \text{acotado} \ \implies \ \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto $\implies$ Acotado
- A acotado $\iff \left[\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \Rightarrow \left\{\dfrac{a_n}{n}\right\} \to 0\right]$
- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A acotado $\implies \overline{A}$ acotado

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:
$\exists U$ entorno de cero en X : $T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

(d) T acotado:

$$A \subset X,\ A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d)
- En general, ninguna reversible
- Si X tiene un entorno de cero acotado, todas son equivalentes
- Si Y tiene un entorno de cero acotado, (b) $\Rightarrow$ (a)
- Si X es semimetrizable, (d) $\Rightarrow$ (b)

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \to X_i \quad (i \in I)$.

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Hechos generales

- Base de la topología inicial:
$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) \ : \ J \subset I,\ J \text{ finito},\ G_i \in \mathcal{T}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Convergencia en la topología inicial:
$$\{x_\lambda\} \to x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \to f_i(x) \ \forall i \in I$$
- Criterio de continuidad: Y espacio topológico, $f : Y \to X$,
$$f \ \text{ continua } \iff f_i \circ f \ \text{ continua } \quad \forall i \in I$$
- Ejemplos: inducida, producto, supremo
- Teorema de Tichonoff: Un producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto

EVT con topología inicial

Topología inicial para aplicaciones lineales

- X espacio vectorial, $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT y para cada $i \in I$, $f_i : X \to X_i$ lineal. Entonces X con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en X:
$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \; : \; J \subset I,\ J \text{ finito},\ U_i \in \mathcal{B}_i \ \forall i \in J \right\}$$
- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo
- Separación: Si X_i es separado para todo $i \in I$,
$$X \quad \text{separado} \iff \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \{0\}$$
- Acotación y Precompacidad: $A \subset X$,
$$A \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \iff f_i(A) \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \quad \forall i \in I$$
- Complitud: $\prod_{i \in I} X_i$ completo $\iff$ X_i completo $\forall i \in I$

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X, $\pi : X \to X/M$ aplicación cociente
Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto } \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

- π es continua y abierta
- X/M es un EVT
- X/M separado $\iff \overline{M} = M$
- Y espacio topológico, $f : X/M \to Y$,
$$f \text{ continua } \iff f \circ \pi \text{ continua}$$
- Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν, definiendo:
$$\widetilde{\nu}(x+M) = \inf\{\nu(x+m) : m \in M\},$$
$\widetilde{\nu}$ es una pseudonorma en X/M que genera la topología cociente. Si ν es una seminorma, igual le ocurre a $\widetilde{\nu}$

Homomorfismos de EVT

Isomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Isomorfismo de X sobre Y: Operador lineal biyectivo $T : X \to Y$ tal que T y T^{-1} son continuos

Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi \downarrow & & \uparrow I \\ X/\ker T & \xrightarrow{\widetilde{T}} & T(X) \end{array}$$

Homomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. Homomorfismo de X en Y: Operador lineal continuo $T : X \to Y$ tal que $T : X \to T(X)$ es una aplicación abierta

Inyectivo $\Rightarrow$ Monomorfismo; Sobreyectivo $\Rightarrow$ Epimorfismo

Todo homomorfismo (T) es composición de un epimorfismo (π), un isomorfismo $(\widetilde{T})$ y un monomorfismo (I)

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X. Complemento algebraico de Y en X: subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi : Y \times Z \to X$, $\Phi(y,z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P : X \to X$ proyección lineal: $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \to X/Y$, $\Psi(z) = z + Y$ biyección lineal

Suma topológico-directa

X EVT, $X = Y \oplus Z$, Φ y Ψ siempre son continuas. Son equivalentes:

(1) Φ^{-1} es continua (Φ es un isomorfismo)

(2) P es continua

(3) Ψ^{-1} es continua (Ψ es un isomorfismo)

Suma topológico-directa

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
  suma topológico directa $\implies$ Y, Z cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa
  Z EVT separado, isomorfo a $X/\overline{\{0\}}$

subespacio complementado

X EVT, Y subespacio de X

Y complementado: $\exists Z : X = Y \oplus Z$ suma topológico-directa

Equivalentemente: $\exists P : X \to X$ proyección lineal continua, $P(X) = Y$

$Z = \ker P$ complemento topológico de Y en X, isomorfo a X/Y

X EVT separado, Y subespacio complementado de X $\implies$ Y cerrado

Tema 8: Tipos de EVT

27 y 31 de mayo, 7 de junio de 2010

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es
  - (a) Continuo $\iff$ su núcleo es cerrado
  - (b) Abierto $\iff$ es sobreyectivo
- En un EVT separado, todo subespacio cerrado de codimensión finita está complementado

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

(c) La bola cerrada unidad de X es compacta

(d) X tiene dimensión finita

Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es localmente compacto

(2) Existe en X un entorno de cero precompacto

(3) X tiene dimensión finita

Espacios L_p de dimensión finita

Los espacios l_p^N

Espacio de medida: $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, μ = número de elementos

$$\int_\Omega x \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} x(k) \qquad \mathcal{L}_p(\mu) = L_p(\mu) = \mathbb{K}^N \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

Como EVT son todos isomorfos: $\mathbb{K}^N$ con la topología producto

$$l_p^N = (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p) \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in \mathbb{K}^N, 1 \leqslant p < \infty)$$

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\, \{|x(k)| : 1 \leqslant k \leqslant N\} \quad (x \in \mathbb{K}^N)$$

Desigualdad de Hölder:

$$\sum_{k=1}^{N} |x(k)|\, |y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0, \infty[\qquad \nu_E(x) = \inf \{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\}$
- Positivamente homogéneo: $\nu_E(rx) = r\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ r \geqslant 0)$
- E equilibrado o convexo $\implies \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$
- E equilibrado $\implies \nu_E(\lambda x) = |\lambda|\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$
- E convexo $\implies \nu_E(x+y) \leqslant \nu_E(x) + \nu_E(y) \quad (x, y \in X)$
- E absolutamente convexo
  $$\implies \begin{cases} \nu_E \text{ seminorma} \\ \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\} \end{cases}$$

Envolvente convexa

X espacio vectorial, $E \subseteq X$. Envolvente convexa de E: intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a E, mínimo subconjunto convexo de X que contiene a E. Descripción:

$$\operatorname{co} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \rho_1, \ldots, \rho_n \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} \rho_k = 1 \right\}$$

Envolvente absolutamente convexa: $|\operatorname{co}| E = \operatorname{co}(\mathbb{D} E) = \operatorname{co}(\mathbb{T} E)$ mínimo subconjunto convexo y equilibrado de X que contiene a E. Descripción:

$$|\operatorname{co}| E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant 1 \right\}$$

Criterio de normabilidad (Kolmogorov, 1934)

Un EVT es seminormable si, y sólo si, contiene un entorno de cero convexo y acotado. Por tanto, un EVT es normable si, y sólo si, es separado y contiene un entorno de cero convexo y acotado

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1)\quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

$$(2)\quad \exists M > 0\ :\ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x)+\nu(y)\big)\ \ \forall x, y \in X$$

Topología asociada a una casinorma ν: Tomando $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$, la familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una única topología vectorial en X

Propiedades

- Localmente acotado $=$ Casinormable
- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales,

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ localmente acotado} \iff \begin{cases} X_i \text{ localmente acotado } \forall i \in I \\ I \text{ finito} \end{cases}$$

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos
Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas: X espacio vectorial, Φ familia de pseudonormas en X. Cada $\nu \in \Phi$ genera una topología vectorial $\mathcal{T}_\nu$. Topología (vectorial) asociada a Φ:
$$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu \ : \ \nu \in \Phi\}$$
Si Φ es una familia de seminormas, $\mathcal{T}_\Phi$ es localmente convexa
- Recíprocamente: la topología de cualquier ELC es la asociada a una familia de seminormas.
- Todo ELC separado es isomorfo a un subespacio de un producto de espacios normados

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

(c) X tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable
- Toda topología vectorial es la asociada a una familia de pseudonormas
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio de un producto de EVT metrizables
- Todo EVT es completamente regular

EVT metrizables

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i\in I} X_i \quad \text{semimetrizable} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \ \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1+\nu_n\big(x(n)\big)}$$

F-espacios

F-espacio $=$ EVT completo metrizable
Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν, X es un F-espacio cuando

$$x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(x_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geqslant 1} x_n \quad \text{converge}$$

(Toda serie absolutamente convergente es convergente)

Estabilidad y completación

- X EVT metrizable, $M \subseteq X$ subespacio, $M = \overline{M}$:

$$X \quad \mathrm{F-espacio} \quad \Longleftrightarrow \quad M \text{ y } X/M \quad \mathrm{F-espacios}$$

- Todo producto numerable de F-espacios es un F-espacio
- Todo EVT metrizable es isomorfo a un subespacio denso de un (único) F-espacio
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio denso de un (único) EVT separado y completo

Espacios de Fréchet

Espacio de Fréchet $=$ F-espacio localmente convexo
$=$ ELC completo metrizable

Hechos básicos

- Un ELC es semimetrizable cuando su topología es la asociada a una familia numerable $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$ de seminormas

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1+\nu_n\big(x(n)\big)}$$

- La clase de los espacios de Fréchet es estable por subespacios cerrados, cocientes separados y productos numerables

Tema 9: Ejemplos de EVT

7 y 10 de junio de 2010

Espacios l_p

Espacio de medida: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ número de elementos

$$x : \mathbb{N} \to [0, \infty] \qquad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \ = \ l_p \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{N}} x \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \right\} \ = \ l_\infty$$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \omega$$

El espacio l_∞

$$l_\infty = \left\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

Convergencia uniforme en $\mathbb{N}$: $\quad x_n \in l_\infty \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k) \ \text{ uniformemente en } k \in \mathbb{N}$$

Subespacio denso:

$$l_\infty = \overline{\operatorname{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \mathbb{N}\}}$$

l_∞ no es separable: $\quad E, F \subseteq \mathbb{N},\ E \neq F \ \Rightarrow \ \|\chi_E - \chi_F\|_\infty = 1$

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad e_n(n) = 1, \quad e_n(k) = 0 \ \forall k \neq n$

$$c_{00} = \operatorname{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \ : \ N \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \exists \lim_{n \to \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K}\, u \qquad \big(u(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}\big)$$

Observaciones

- c_0 y c son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞)
- c_{00} es denso en c_0: $x \in c_0 \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$

  Serie incondicionalmente convergente en c_0. Los vectores unidad forman una base de Schauder, de hecho una base incondicional, de c_0

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p)$$

Para $0 < p < 1$, l_p tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$ que le convierte en un F-espacio
- O mejor, la casinorma: $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un espacio casi-Banach

$$\|x+y\|_p \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \quad (x, y \in l_p, 0 < p < 1)$$

Para $0 < p < 1$, l_p no es localmente convexo

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

- c_{00} es un subespacio denso en l_p:

$$x \in l_p \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$$

  serie (incondicionalmente) convergente en l_p. Los vectores unidad forman una base (incondicional) de l_p

- Dependencia de p:

$$0 < p < q \leqslant \infty\,,\; x \in l_p \quad \Rightarrow \quad x \in l_q\,,\; \|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

  La inclusión $l_p \subseteq l_q$ es estricta y el operador $Id : l_p \to l_q$ es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

Caso $p = 0$

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la topología producto es la asociada a la pseudonorma

$$\lceil x \rceil_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \quad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en ω es la puntual:

$$\lceil x_n - x \rceil_0 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} x_n(k) = x(k) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

  ω es un espacio de Fréchet no normable
- c_{00} es denso en ω y ω es separable
- Para $0 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales:

$$c_{00} \subset l_p \subset l_q \subset c_0 \subset c \subset l_\infty \subset \omega$$

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$ conjunto dirigido (por inclusión)

X EVT separado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \qquad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \{S_J\} \text{ convergente}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \{S_J\} \to x$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \ \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) \ : \ J \in \mathcal{F}(\Lambda), \ J \supseteq J_0 \ \Rightarrow \sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x \in U$$

Condición de Cauchy:

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \ \ \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) \ : \ K \in \mathcal{F}(\Lambda), \ K \cap J_0 = \emptyset \ \Rightarrow \sum_{\lambda \in K} x_\lambda \in U$$

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud
- Linealidad: $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha a_\lambda+\beta b_\lambda)=\alpha\sum_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda+\beta\sum_{\lambda\in\Lambda}b_\lambda$
- Incondicionalidad: $\sigma : I \to \Lambda$ biyectiva,
$$\sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda = x \iff \sum_{i\in I}x_{\sigma(i)} = x$$
- Operadores: X, Y EVT separados, $T \in L(X,Y)$,
$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda}x_\lambda \ \text{ en } \ X \implies T(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda}T(x_\lambda) \ \text{ en } \ Y$$
- Consecuencias de la condición de Cauchy:
  (1) Subfamilias: $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \Rightarrow \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ Cauchy
  (2) $U \in \mathcal{U}(0) \implies \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \notin U\}$ finito
  (3) Si X es metrizable: $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es numerable

Relación con las series

- X EVT separado, Λ numerable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:
  - (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable
  - (b) $\sigma : \mathbb{N} \to \Lambda$ biyectiva $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ converge.

  Si se cumplen (a) y (b): $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$

- X EVT metrizable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:
  - (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable
  - (b) $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es numerable y para cualquier biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \Lambda_1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ converge

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[\qquad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \Big\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \Big\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable } \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

X EVT metrizable, con pseudonorma ν:

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ absolutamente sumable } \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

Sumabilidad y sumabilidad absoluta

- X F-espacio $\iff$ toda familia absolutamente sumable es sumable
- En dimensión finita toda familia sumable es absolutamente sumable
- Teorema de Dvoretsky-Rogers (1950): En todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente, equivalentemente una familia sumable que no es absolutamente sumable

Espacios l_p^Λ

Espacio de medida: $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$, μ = número de elementos

$$x : \Lambda \to [0, \infty] \qquad \int_\Lambda x \, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \Big\} \; = \; l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \quad \Longrightarrow \quad \int_\Lambda x \, d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda \; : \; \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \Big\} \; = \; l_\infty^\Lambda$$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu) = \mathbb{K}^\Lambda$$

El espacio l_∞^Λ

$$l_\infty^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda \ : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

Convergencia uniforme en Λ: $\quad x_n \in l_\infty^\Lambda \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty^\Lambda$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(\lambda) = x(\lambda) \ \text{ uniformemente en } \lambda \in \Lambda$$

Subespacio denso:

$$l_\infty^\Lambda = \overline{\operatorname{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \Lambda\}}$$

Λ infinito $\implies$ l_∞^Λ no es separable: $\quad l_\infty \subseteq l_\infty^\Lambda$

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda, \quad e_\lambda(\lambda) = 1, \quad e_\lambda(\delta) = 0 \ \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) \ = \ \mathrm{Lin}\,\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \ \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) \ = \ c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}\,u \qquad \big(u(\lambda) = 1 \ \forall \lambda \in \Lambda\big)$$

Observaciones

- $c_0(\Lambda)$ y $c(\Lambda)$ son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞^Λ)
- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en $c_0(\Lambda)$: $\quad x \in c_0(\Lambda) \ \Rightarrow \ x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$

  Los vectores unidad forman una base, de $c_0(\Lambda)$

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p^Λ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para $0 < p < 1$, l_p^Λ tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p$ que le convierte en un F-espacio
- O la casinorma: $\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un espacio casi-Banach

Si Λ es infinito y $0 < p < 1$, l_p^Λ no es localmente convexo

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}(\Lambda)$ es un subespacio denso en l_p^Λ:

$$x \in l_p^\Lambda \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

  Los vectores unidad forman una base de l_p^Λ

- Dependencia de p:

$$0 < p < q \leqslant \infty\,,\ x \in l_p^\Lambda \quad \Rightarrow \quad x \in l_q^\Lambda\,,\ \|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

  Si Λ es infinito, la inclusión $l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda$ es estricta y el operador $Id : l_p^\Lambda \to l_q^\Lambda$ es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

Caso $p = 0$

- En $\mathbb{K}^\Lambda$ es natural considerar la topología producto, que le convierte en un ELC separado y completo. Si Λ no es numerable, $\mathbb{K}^\Lambda$ no es metrizable
- Convergencia puntual: $\{x_i\}$ red en $\mathbb{K}^\Lambda$, $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \to x \iff \{x_i(\lambda)\} \to x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en $\mathbb{K}^\Lambda$:

$$x \in \mathbb{K}^\Lambda \implies x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

- $\mathbb{K}^\Lambda$ tiene la propiedad de Heine-Borel: todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{K}^\Lambda$ es compacto
- Para $0 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales:

$$c_{00}(\Lambda) \subseteq l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda \subseteq c_0(\Lambda) \subseteq c(\Lambda) \subseteq l_\infty^\Lambda \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$$

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano $=$ espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1)+(2) =$ forma sexquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
($x \mapsto (x|x)$, de X en $\mathbb{R}$ forma cuadrática)

(4) Definida positiva: $(x|x) > 0 \quad (x \neq 0)$

Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

Espacio de Hilbert cuando la norma es completa

Polarización: $\operatorname{Re}(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right); \quad \operatorname{Im}(x|y) = \operatorname{Re}(x|iy)$

Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Ejemplos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida no trivial:

$$\exists\ A, B \in \mathcal{A}\ :\ A \cap B = \emptyset,\ 0 < \mu(A) < \infty,\ 0 < \mu(B) < \infty$$

Entonces:

$$L_p(\mu) \ \text{Espacio de Hilbert} \iff p = 2$$

Producto escalar en $L_2(\mu)$:

$$(f|g) = \int_\Omega f\,\overline{g}\,d\mu \ \ \big(f, g \in L_2(\mu)\big); \qquad (x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\,\overline{y(\lambda)} \ \ \big(x, y \in l_2^\Lambda\big)$$

Teorema de la Proyección Ortogonal

- Aproximación óptima. Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists!\ P_C(x) \in C :\ \|x - P_C(x)\| = \min\{\|x-y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$ se caracteriza por: $\operatorname{Re}(x - P_C(x) | y - P_C(x)) \leqslant 0 \ \ \forall y \in C$
- Si M es un subespacio cerrado: $(x - P_M(x)|m) = 0 \ \ \forall m \in M$,

$$x - P_M(x) \in M^\perp := \{z \in H : (z|m) = 0 \ \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^\perp$ suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \qquad (x \in X)$$

- Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado

Teorema de Lindenstrauss-Tzafriri (1971)

Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, todo subespacio cerrado de X está complementado en X.

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \qquad \|e_\lambda\| = 1 \;\; \forall \lambda \in \Lambda$$

Base ortonormal cuando, además, $X = \overline{\operatorname{Lin}(E)}$

Propiedades de los sistemas ortonormales

H Hilbert, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$ ortonormal, $M = \overline{\operatorname{Lin}(E)}$, $x \in H$.

- Desigualdad de Bessel: $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \leqslant \|x\|^2$
- Proyección ortogonal sobre M: $\displaystyle P_M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda$
- $\displaystyle \|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x|e_\lambda)\,(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- Desarrollo de Fourier: $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen: $H \equiv l_2^\Lambda$

Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal
- Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal: dimensión hilbertiana.
- Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana
- Salvo isomorfismos isométricos, los únicos espacios de Hilbert separables son l_2^N con $N \in \mathbb{N}$ y l_2

Tema 10: Teorema de Hahn-Banach

14 y 17 de junio de 2010

Enunciado del Teorema

Teorema de Hahn-Banach, versión analítica

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ funcional sublineal:

$$\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X)$$
$$\nu(r\,x) = r\,\nu(x) \quad (x \in X,\ r \geqslant 0)$$

M subespacio vectorial de X, $g : M \to \mathbb{K}$ lineal, verificando:

$$\operatorname{Re}\, g(m) \leqslant \nu(m) \quad \forall m \in M$$

Entonces existe $f : X \to \mathbb{K}$ lineal

que extiende a g:

$$f(m) = g(m) \quad \forall m \in M$$

y verifica:

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

Si ν es una seminorma, se tiene de hecho

$$|f(x)| \leqslant \nu(x) \quad \forall x \in X$$

Dual topológico de un EVT

Definición

X EVT. Dual topológico de X:

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ lineal y continuo }\}$$

$$¿X^* \neq \{0\}?$$

¿X^* separa los puntos de X?: ¿ $x \in X \setminus \{0\} \implies \exists f \in X^* : f(x) \neq 0$?

Construcción de funcionales lineales

X espacio vectorial, $X \supset U$ absorbente y convexo, $x_0 \in X \setminus U$

Existe $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant 1 \quad \forall x \in U\,, \quad \operatorname{Re} f(x_0) \geqslant 1$$

Abundancia de funcionales lineales continuos

X EVT

- $X^* \neq \{0\}$ si, y sólo si, X contiene un entorno de cero convexo $U \neq X$
- X^* separa puntos si, y sólo si, la intersección de los entornos de cero convexos en X es $\{0\}$
- X ELC separado $\implies$ X^* separa puntos

Extensión de funcionales lineales continuos

Teorema de extensión en ELC

X ELC, M subespacio vectorial de X, $g \in M^*$:

$$\exists\ f \in X^* : f(m) = g(m) \quad \forall m \in M$$

Extensión equinórmica en espacios normados

X espacio normado, M subespacio vectorial de X, $g \in M^*$:

$$\exists\ f \in X^* : f(m) = g(m) \quad \forall m \in M \qquad \text{y} \qquad \|f\| = \|g\|$$

Una consecuencia interesante

En un ELC separado, todo subespacio de dimensión finita está complementado

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X, $M^\circ = \left\{f \in X^* : f(M) = \{0\}\right\}$

Como espacios vectoriales: $M^* \equiv X^*/M^\circ$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Dual de un cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X. Como espacios vectoriales:

$$(X/M)^* \equiv M^\circ$$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Caracterización dual del cierre de un subespacio

X ELC, M subespacio de X

$$\overline{M} = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in M^\circ\} = \bigcap_{f \in M^\circ} \ker f$$

En particular: $\overline{M} = X \iff M^\circ = \{0\}$

Límites generalizados

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$ $(x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $g(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $(y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\, h \in l_\infty^* : \|h\| = 1,\ h(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)\ \ \forall y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Existe un funcional $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(n) : n \in \mathbb{N}\}$ $\forall x \in l_\infty$

(3) $f\big(x^{(k)}\big) = f(x)$ $\forall x \in l_\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$, donde

$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Como consecuencia se tiene que $f \in l_\infty^*$, $\|f\| = 1$ y

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) \leqslant f(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x(n) \quad \forall x \in l_\infty$$

En particular $f(y) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n)$ $\forall y \in c$. Se dice que f es un límite de Banach

Medias invariantes

$(\Lambda,+)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3) $f\left(x^{(\gamma)}\right) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda, \ \forall \gamma \in \Lambda$ donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda+\gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$ con $\|f\| = 1$

Medidas finitamente aditivas

Existe una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ que verifica las siguientes condiciones:

(a) Es finitamente aditiva:

$$A, B \subset \mathbb{R}, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(b) Es invariante por traslaciones:

$$A \subset \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R} \implies \mu(A+x) = \mu(A)$$

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.
El hiperplano afín (real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \gamma$ también separa A y B

Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

$X = c_{00}$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad, $B = \{0\}$,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \, : \, N \in \mathbb{N}, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \ \alpha_N > 0 \right\}$$

A y B son subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de c_{00} pero

$$f : c_{00} \to \mathbb{R} \ \text{ lineal, } f \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(A) = \mathbb{R}$$

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces podemos separar A y B: existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

Separación en EVT

X EVT, A y B subconjuntos convexos.

Supongamos que $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, que $B \neq \emptyset$ y que $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$.

Entonces existen $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

De hecho, se tiene

$$\operatorname{Re} f(x) < \gamma \quad \forall x \in \operatorname{int} A$$

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \max \{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

X EVT, A subconjunto no vacío, abierto y convexo, M variedad afín tal que $A \cap M = \emptyset$.

Existe un hiperplano cerrado $H \subset X$ tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$

Separación en dimensión finita

A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de $\mathbb{K}^N$.

Existen $f : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Equivalentemente, existen $u \in \mathbb{K}^N \setminus \{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} \left(a \middle| u \right) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} \left(b \middle| u \right) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

X ELC, A, B subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que A es cerrado y B es compacto.

Existen $f \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

X espacio normado, A, B subconjuntos no vacíos, convexos.

Supongamos que A y B están a distancia positiva: $d(A, B) = \rho > 0$.

Entonces, existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma < \gamma + \rho \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Integral de Pettis

Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, X ELC separado, $\varphi : \Omega \to X$.

- φ débilmente medible $\iff$ $f \circ \varphi$ medible $\forall f \in X^*$
- φ débilmente integrable $\iff$ $f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ $\forall f \in X^*$
- φ es integrable en el sentido de Pettis cuando es débilmente integrable y existe $x \in X$ tal que

$$f(x) = \int_\Omega (f \circ \varphi)\, d\mu \quad \forall f \in X^*$$

El vector x es único, se le llama integral de Pettis de φ con respecto a μ:

$$x = \int_\Omega \varphi\, d\mu$$

Integral de Pettis

Existencia de la integral

X ELC separado y completo

K espacio topológico compacto de Hausdorff

μ medida de Borel positiva y finita en K

Toda función continua de K en X es integrable en el sentido de Pettis.

Suponiendo, sin perder generalidad, $\mu(K) = 1$, para toda función continua $\varphi : K \to X$ se tiene:

$$\int_K \varphi \, d\mu \in \overline{\operatorname{co} \varphi(K)}$$

Tema 11: Teoremas de la Aplicación Abierta y Gráfica Cerrada

21 y 24 de junio de 2010

Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

E espacio topológico, $A \subset E$

A es de primera categoría en E cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{donde} \quad F_n = \overline{F_n} \subset E\,, \ \operatorname{int} F_n = \emptyset\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso, A es de segunda categoría en E

Espacios de Baire

Para un espacio topológico E, son equivalentes:

(1) $A \subset E\,, \ \operatorname{int} A \neq \emptyset \implies A$ de 2^a categoría en E

(2) A de 1^a categoría en $E \implies \operatorname{int} A = \emptyset$

(3) $F_n = \overline{F_n} \subset E \ \forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \operatorname{int} F_m \neq \emptyset$

(4) $G_n = \operatorname{int} G_n\,,\ \overline{G_n} = E \ \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = E$

Se dice que E es un espacio de Baire cuando las verifica. En particular, un espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo

Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

Ejemplos

- La categoría es relativa: $\mathbb{R}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$, de 1^a en $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$, A de 1^a en $E_1 \;\Rightarrow\; A$ de 1^a en E_2
- Una unión numerable de conjuntos de 1^a categoría es de 1^a categoría
- $\mathbb{Q}$ es de 1^a categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de 2^a categoría en $\mathbb{R}$ (luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable)

Aplicaciones

- "Abundan" las funciones continuas no derivables así como las de clase C^∞ no analíticas
- La dimensión de un F-espacio (en particular, de un espacio de Banach) es finita o no numerable

Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal:

T es abierta cuando: U entorno de cero en $X \Rightarrow T(U)$ entorno de cero en Y
Se dice que T es casi-abierta cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

Primer paso (categoría)

X, Y EVT, $T : X \to Y$ lineal

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X, Y)$

$$T \text{ casi-abierta} \implies T \text{ abierta, } T(X) = Y\text{, } Y \text{ F-espacio}$$

Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

X F-espacio, Y EVT metrizable, $T \in L(X,Y)$

$T(X)$ de 2^a categoría en $Y \implies T$ abierta, $T(X) = Y$, Y F-espacio

Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

X,Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$T(X) = Y \implies T$ abierta

Teorema de los Isomorfismos de Banach

X,Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

T biyectiva $\implies T^{-1}$ continua

Teorema del Homomorfismo de Banach

X,Y F-espacios, $T \in L(X,Y)$

$T(X) = \overline{T(X)} \implies T$ homomorfismo

Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\, e^{int}$ donde $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi,\pi]$$

Coeficientes de Fourier: $\displaystyle\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds \qquad (n\in\mathbb{Z})$

Serie de Fourier: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$

Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para $a:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ ¿$\exists f\in L_1 : \widehat{f} = a$?

- Lema de Riemann-Lebesgue: $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0 \qquad \left(\widehat{f}\in c_0(\mathbb{Z})\right)$
- Teorema de unicidad: $f,g\in L_1\,,\ \widehat{f}=\widehat{g} \implies f=g$ (c.p.d.)

Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \to c_0(\mathbb{Z})\,, \quad T(f) = \widehat{f}$$

- T es lineal, continuo e inyectivo
- L_1 y $c_0(\mathbb{Z})$ no son isomorfos
- Luego T no es sobreyectivo
- Luego $T(L_1)$ es de 1^a categoría en $c_0(\mathbb{Z})$
- Entre las series trigonométricas con coeficientes tendiendo a cero las series de Fourier son "atípicas". El lema de Riemann-Lebesgue está muy lejos de caracterizar las series de Fourier.

Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial: $y_0, y_1, y_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas
Datos del problema: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED): $y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x = f$ (CC): $x(a) = \alpha\,,\ \ x(b) = \beta$

Solución (clásica): función $x \in C^2[a,b]$ verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

Tratamiento funcional

$X = C^2[a,b]$ espacio de Banach: $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a,b] \times \mathbb{R}^2$ espacio de Banach: $\|(f,\alpha,\beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de X en Y: $T(x) = \big(y_0\,\ddot{x} + y_1\,\dot{x} + y_2\,x\,,\, x(a)\,,\, x(b)\big)$

- T es lineal y continuo
- Problema bien planteado $\iff$ T biyectivo
- Teorema de los isomorfismos de Banach: si el problema está bien planteado, la solución depende de manera continua de los datos

Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

X, Y espacios topológicos de Hausdorff, $f : X \to Y$,

$$\operatorname{Gr} f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) : x \in X \Big\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \operatorname{Gr} f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

X, Y espacios métricos:

- f es continua cuando: $\{x_n\} \to x \implies \{f(x_n)\} \to f(x)$
- $\operatorname{Gr} f$ es cerrada cuando: $\{x_n\} \to x\,,\ \{f(x_n)\} \to y \implies f(x) = y$

Teorema de la Gráfica Cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal, $\operatorname{Gr} T$ cerrada $\implies$ T continuo

Por tanto, para asegurar que T es continuo basta probar:

$$\{x_n\} \to 0\,,\ \{T x_n\} \to y \implies y = 0$$

Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

E espacio topológico de Hausdorff, $J : Y \to E$ inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

Caso particular

X, Y F-espacios, $T : X \to Y$ lineal

$\Phi \subset Y^*$ subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, \quad f(y) = 0 \ \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

Ejemplos

- $Y = l_p \quad (0 < p \leqslant \infty), \quad \Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}, \ f_n(y) = y(n) \ \forall y \in Y, \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $Y = L_p[0,1] \quad (0 < p \leqslant \infty), \ E = L_0[0,1], \ Jy = y \ \forall y \in Y$
- $Y = C[0,1], E = \mathbb{K}^{[0,1]}, \ Jy = y \ \forall y \in Y$

Tema 12: Teorema de Banach-Steinhaus

24 de junio de 2010

1. Teorema de Banach-Steinhaus

2. Aplicaciones
   - En Analisis Funcional
   - A las series de Fourier

Principio de Acotación Uniforme

Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}^X$ familia de funciones de X en $\mathbb{R}$

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E\,,\ x \in B\} < \infty$

Principio de acotación uniforme

X espacio topológico de 2^a categoría en sí mismo

$\mathcal{F}$ familia de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F} \text{ puntualmente acotada}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{F} \text{ uniformemente acotada en un abierto no vacío } B \subset X$$

Basta considerar: $F_n = \{x \in X : |f(x)| \leqslant n \quad \forall f \in E\} \qquad (n \in \mathbb{N})$

Lema de Baire: $\Longrightarrow$ Como X se puede tomar cualquier subconjunto abierto de un espacio métrico completo

Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

X,Y espacios normados, $E \subset L(X,Y)$ familia de operadores lineales continuos

- E acotada en $x_0 \in X$: $\sup\{\|T x_0\| : T \in E\} < \infty$
- E puntualmente acotada: $\sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- E uniformemente acotada en $B \subset X$: $\sup\{|f(x)| : f \in E,\ x \in B\} < \infty$
- E uniformemente acotada en la bola unidad: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$

Teorema de Banach-Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $E \subset L(X,Y)$

$A = \big\{x \in X : \sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty\big\}$. Son equivalentes:

(a) A es de 2^a categoría en X

(b) $A = X$, es decir, E está puntualmente acotada:
$$\sup\{\|T x\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$$

(c) E está acotada en norma:
$$\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$$

Primeras aplicaciones

Teorema de cierre de Steinhaus

X espacio de Banach, Y espacio normado, $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X,Y)$ sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X:

$$\{T_n x\} \to T x \quad \forall x \in X$$

Entonces $T \in L(X,Y)$

Caracterización dual de la acotación

X espacio normado, $E \subset X$

$$E \text{ acotado} \iff f(E) \text{ acotado} \quad \forall f \in X^*$$

Explícitamente:

$$\sup\{\|x\| : x \in E\} < \infty \iff \sup\{|f(x)| : x \in E\} < \infty \quad \forall f \in X^*$$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \downdownarrows \qquad\qquad \upuparrows \quad g(z) = f(\operatorname{Arg} z)$$

Función 2π-periódica $f\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$$\phi :]-\pi,\pi] \to \mathbb{T} \quad \phi(t) = e^{it} \quad \forall t \in]-\pi,\pi] \quad \text{biyectiva}$$

$$E \subset \mathbb{T} \text{ medible} \iff \phi^{-1}(E) \text{ medible-Lebesgue en } \mathbb{R}$$

$$m(E) := \frac{1}{2\pi} \lambda\big(\phi^{-1}(E)\big)$$

$$L_p(\mathbb{T}) = L_p(m) \qquad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

Espacios $L_p(\mathbb{T})$

- $L_p(\mathbb{T})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ "Funciones" medibles $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|g\|_p : \left(\int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p \, dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

  o bien, "funciones" medibles 2π-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < \infty$$

- $L_\infty(\mathbb{T})$. "Funciones" medibles y esencialmente acotadas $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, o bien, "funciones" medibles, 2π-periódicas y esencialmente acotadas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$$\|g\|_\infty = \text{ess sup}\,|g| = \text{ess sup}\,|f| = \|f\|_\infty \quad \big(g \equiv f \in L_\infty(\mathbb{T})\big)$$

- $C(\mathbb{T})$. Funciones continuas $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, o bien, funciones continuas y 2π-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ con

$$\|g\|_\infty = \text{máx}\,\{|g(z)| : z \in \mathbb{T}\} = \text{máx}\,\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} \quad \big(g \equiv f \in C(\mathbb{T})\big)$$

Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador $Id : L_q(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leqslant \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \quad \Longrightarrow \quad \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leqslant p < \infty)$$

Series de Fourier

$f \equiv g \in L_1(\mathbb{T})$. Coeficientes de Fourier de f:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \int_{\mathbb{T}} g(z)\, z^{-n}\, dm(z) \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

Serie de Fourier de f: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int} \quad \equiv \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, z^n$

Convergencia de series de Fourier

Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$. Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(n)\, e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R},\ n = 0,1,2,\ldots)$$

Problema: ¿ $\{S_n(f,\cdot)\} \to f$? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

Convergencia en norma

Riesz: $1 < p < \infty,\ f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f,\cdot)\} \to f$ en $L_p(\mathbb{T})$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f,t) - f(t)|^p\, dt = 0$$

Convergencia puntual

Para $f \in C(\mathbb{T})$ tiene sentido preguntar:

$$¿\,\{S_n(f,t)\} \to f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}\,?$$

La respuesta es negativa (DuBois-Reymond) pero no es fácil dar ejemplos

Punto de vista "funcional"

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, tenemos:

$$S_n(f,0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} \right) dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt = \varphi_n(f)$$

Recordemos: $L_1(\mathbb{T}) \subset M(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})^*$

Luego $\varphi_n \in C(\mathbb{T})^*$ con $\|\varphi_n\| = \|D_n\|_1$

Ahora un poco de cálculo:

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} = \frac{\operatorname{sen}\big((2n+1)t/2\big)}{\operatorname{sen}(t/2)} \quad (0 < |t| \leqslant \pi) \quad D_n(0) = 2n+1$$

y se comprueba sin mucha dificultad que $\{\|D_n\|_1\} \to +\infty$

Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Aplicación a las series de Fourier

El conjunto de las funciones $f \in C(\mathbb{T})$ tales que la sucesión $\{S_n(f,0)\}$ está acotada es de 1^a categoría en $C(\mathbb{T})$. Así pues, la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función continua es "atípica"