Examenes de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 21/12/2004

1. (**Valor total del ejercicio: 5 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Escríbase de manera precisa la formulación de **problema de Cauchy para la ecuación del calor** $n-$**dimensional**, así como el concepto de solución del mismo.

   (b) (**1 punto**) Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy anterior, proporcionando además la fórmula que da la única solución.

   (c) (**3 puntos**) Calcúlese la única solución acotada del problema de Cauchy

$$\begin{array}{c} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \ x \in \mathrm{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = \exp(-3x^2), \ x \in \mathrm{R}. \end{array} \tag{1}$$

2. (**Valor total del ejercicio: 5 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Escríbase de manera precisa la formulación del **primer problema de tipo mixto para la ecuación de ondas unidimensional**, así como el concepto de solución del mismo.

   (b) (**1 punto**) Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de tipo mixto anterior, proporcionando además la fórmula que da la única solución .

   (c) (**3 puntos**) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \ 0 \le x \le \pi, \ t > 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \ 0 \le x \le \pi \\[2ex] u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \ge 0, \end{array} \tag{2}$$

   donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ (\pi - x), & \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 03/02/2005

1. (**Valor total del ejercicio: 3 puntos**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T,\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T,\\
u(x,0) &= \operatorname{sen}^3 x, && 0 \leq x \leq \pi,
\end{aligned}$$

2. (**Valor total del ejercicio: 3 puntos**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos x, && 0 \leq x \leq \pi, t > 0\\
u(x,0) &= \operatorname{sen} x, && 0 \leq x \leq \pi\\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \leq x \leq \pi\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \geq 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Sugerencia: búsquese la solución u de (1) de la forma $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$.

3. (**Valor total del ejercicio: 4 puntos**)

(a) (**1 punto**) Considérese la ecuación de Laplace n-dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{2}$$

Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathrm{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (2) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathrm{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0,\ \forall\, r \in (0, +\infty). \tag{3}$$

Recíprocamente, si v verifica (3) entonces $u(x) = v(\|x\|)$ verifica (2) en $\mathrm{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) (**3 puntos**) Teniendo en cuenta el apartado anterior, calcúlese la única solución del problema

$$\begin{gathered}
\Delta u(x,y) = 1,\ b^2 < x^2 + y^2 < a^2,\\
u(x,y) = 0,\ \text{si}\ \ x^2 + y^2 = b^2\ \ \text{ó}\ \ x^2 + y^2 = a^2
\end{gathered}$$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 07/09/2005, Primera parte

1. (**2 puntos**) Considérese el problema de Dirichlet

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ (x,y)\in\Omega\equiv\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 : x^2+y^2<1\},\\ u(x,y)=f(x,y),\ (x,y)\in\partial\Omega.\end{gathered} \tag{1}$$

   Demuéstrese que mediante un cambio a coordenadas polares $x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\mathrm{sen}\phi$, el problema anterior se transforma en

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0,\ 0<\rho<1,\ \phi\in\mathrm{R},\\ u(1,\phi)=g(\phi),\ \phi\in\mathrm{R},\end{gathered} \tag{2}$$

   donde $g:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ está definida como $g(\phi)=f(cos\phi, sen\phi)$.

2. (**3 puntos**) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\ 0\le x\le\pi,\ t>0\\ u(x,0)=\mathrm{sen}x,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\mathrm{sen}^2x,\ 0\le x\le\pi\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0,\ t\ge 0,\end{gathered} \tag{3}$$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 07/09/2005, Segunda parte

1. (**Valor total del ejercicio 2.5 puntos**)

   (a) (**0.5 puntos**) Enúnciese el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor.

   (b) (**2 puntos**) Calcular la única solución del problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\quad 0 \le x \le \pi, \end{aligned}$$

   donde

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(4x), \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. (**2.5 puntos**) Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi,$$
$$u(0,y) = 0,\ u(1,y) = f(y),\ u(x,0) = 0,\ u(x,\pi) = 0$$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 03/02/2006, Primera parte

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, demuéstrese que la función

   $$v(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy \right) ds$$

   verifica

   $$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t)\ , \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$$
   $$v(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};\quad v_t(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   (Sugerencia: recuérdese que $\dfrac{\partial \left(\int_0^t H(x,t,s)\,ds \right)}{\partial t} = H(x,t,t) + \displaystyle\int_0^t \frac{\partial H(x,t,s)}{\partial t}\,ds$).

   (b) (**2 puntos**) Encuéntrese la única solución del problema de Cauchy

   $$u_{tt} - u_{xx} = \text{sen}(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}\ , t > 0$$
   $$u(x,0) = x^2\ \forall x \in \mathbb{R};\quad u_t(x,0) = x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

   (c) (**0.5 puntos**) Si u es la función obtenida en el apartado anterior, ¿cuánto vale $\lim_{t \to +\infty} u(x,t)$?

2. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Enúnciese de manera precisa el segundo problema de tipo mixto asociado a la ecuación del calor, así como la fórmula que proporciona la única solución del mismo.

   (b) (**2 puntos**) Cálculese la única solución del problema

   $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t};\quad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T$$

   $$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0;\quad 0 < t \le T$$

   $$u(x,0) = \text{sen}^3(x);\quad 0 \le x \le \pi$$

   (Sugerencia: demuéstrese previamente que $\text{sen}^3(x) = \dfrac{3}{4}\text{sen}(x) - \dfrac{1}{4}\text{sen}(3x)\ , \forall x \in \mathbb{R}$).

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 03/02/2006, Segunda parte

3. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**0.5 puntos**) Enúnciese de manera precisa el Principio del Máximo-Mínimo para funciones armónicas (o para la ecuación de Laplace).

   (b) (**1.5 puntos**) Demuéstrese que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y las funciones $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ satisfacen

$$\begin{array}{ll} \Delta u_1(x) = \Delta u_2(x)\,, & \text{si } x \in \Omega \\ u_1(x) \leq u_2(x)\,, & \text{si } x \in \partial\Omega \end{array}$$

   entonces se verifica $u_1(x) \leq u_2(x)\,, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$.

   (c) (**1.5 puntos**) Sea Ω el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Usando el apartado anterior, demuéstrese que

$$xy^3 + x^2 + y \leq x^3y + y^2 + x\,, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 07/09/2006, Primera parte

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   Considérese el problema de tipo mixto

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, & 0 \leq x \leq \pi, \ t > 0 \\
u(x,0) & = & f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\
\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} & = & g(x), & 0 \leq x \leq \pi \\
u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & t \geq 0,
\end{array}
\tag{1}
$$

   (a) (**0.5 puntos**) Interprétese (1) desde el punto de vista de la Física.

   (b) (**1 punto**) Demuéstrese que (1) tiene, a lo sumo, una solución. (Sugerencia: método de la energía).

   (c) (**1 punto**) Si f y g son funciones de la forma

$$
f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \operatorname{sen}(i\,x), \qquad g(x) = \sum_{j=1}^{p} b_j \operatorname{sen}(j\,x),
$$

   siendo a_i, $1 \leq i \leq m$ y b_j, $1 \leq j \leq p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (1)?

   (d) (**1 punto**) Si $g \equiv 0$ y $f \in C^3[0,\pi]$, $f(0) = f(\pi) = f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0$, ¿cuál es la única solución de (1)?

2. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Enúnciese de manera precisa el primer problema de tipo mixto asociado a la ecuación del calor, así como la fórmula que proporciona la única solución del mismo.

   (b) (**2 puntos**) Calcúlese la única solución del siguiente segundo problema de tipo mixto asociado a la ecuación del calor:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0; \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ x - \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 07/09/2006, Segunda parte

3. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi,$$
$$u_y(x,0) = 0,\ u_y(x,\pi) = 0,\ u(0,y) = \cos y,\ u(1,y) = \operatorname{sen}^2 y.$$

(Sugerencia: Puede ser útil la identidad $\operatorname{sen}^2 y = \dfrac{1-\cos(2y)}{2}$).

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales I.C.C.P. Tercer curso, 02/02/2007, Primera parte

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**1.5 punto**) Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de solución para el primer problema mixto (tipo 1) asociado a la ecuación de ondas unidimensional sobre el conjunto de puntos $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$. Dar la fórmula explícita de dicha solución como serie de Fourier.

   (b) (**2 puntos**) Sean $\ell > 0$ y $u(x,t)$ la solución del problema

$$(P_0) \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} & = & 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(x,0) & = & f(x), \quad 0 \le x \le \ell, \\ u_t(x,0) & = & g(x), \quad 0 \le x \le \ell, \\ u(0,t) = u(\ell,t) & = & 0, \quad t > 0, \end{array} \right.$$

   donde se suponen f y g en las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Escríbase la fórmula que da la única solución de (P_0) como serie de Fourier.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**2 puntos**) Enúnciese de manera precisa el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor. Aplíquese dicho principio para demostrar el siguiente resultado: Sea $f \in C^1[0,\pi]$ verificando $f(0) = f(\pi) = 0$. Sea $u(x,t)$ la única solución del problema

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \le x \le \pi, \; 0 < t \le T$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \quad 0 < t \le T$$

$$u(x,0) = f(x); \quad 0 \le x \le \pi$$

   Entonces se verifica

$$\max_{(x,t)\in[0,\pi]\times[0,T]} u(x,t) = \max_{x\in[0,\pi]} f(x) \qquad \text{y} \qquad \min_{(x,t)\in[0,\pi]\times[0,T]} u(x,t) = \min_{x\in[0,\pi]} f(x)$$

   (b) (**1.5 puntos**) Cálculese la única solución del problema

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \le x \le \pi, \; 0 < t \le T$$

$$u(0,t) = 0; \quad 0 < t \le T$$

$$u(\pi,t) = \pi^2; \quad 0 < t \le T$$

$$u(x,0) = x^2; \quad 0 \le x \le \pi$$

   (Sugerencia: hágase un cambio de variable $v(x,t) = u(x,t) + h(x)$ para una adecuada función h).

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 02/02/2007, Segunda parte

3. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Considérese la ecuación de Laplace n-dimensional

   $$\Delta u(x) = 0 \tag{1}$$

   Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (1) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

   $$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0, \ \forall\, r \in (0, +\infty). \tag{2}$$

   (b) (**2 puntos**) Calcúlese la única solución del problema

   $$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= x^2 + y^2, & \quad (x,y) &\in \Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0;a),\ a > 0. \\ u(x,y) &= 5, & (x,y) &\in \partial\Omega \end{aligned}$$

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. tercer curso, 05/09/2007, primera parte

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**1.5 puntos**) Formúlese el primer problema de tipo mixto asociado a la ecuación de ondas unidimensional sobre el conjunto de puntos $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$ y enúnciese un teorema de existencia y unicidad de solución para dicho problema. Dar la fórmula explícita de dicha solución como serie de Fourier.

   (b) (**1 punto**) Calcúlese la única solución del problema

$$(P_0) \equiv \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi - x, & \text{si } \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

   (c) (**1 punto**) Calcúlese la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}^2 x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**) Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dos constantes. Considérese el problema

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ 0 \le x \le \pi,\ \ 0 < t \le T, \\ u(0,t) = c_1,\ u(\pi,t) = c_2,\ 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le \pi. \end{gathered} \tag{1}$$

   (a) (**0.5 puntos**) Enúnciese el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor y usando dicho principio pruébese que si $c_1 = c_2 = 0$ y $f \equiv 0$, entonces (1) sólo tiene la solución $u \equiv 0$.

   (b) (**0.5 puntos**) Si $c_1 = c_2 = 0$ y $f \in C^1([0,\pi])$ satisface $f(0) = f(\pi) = 0$, dar la fórmula explícita de la única solución de (1) como serie de Fourier.

   (c) (**1.5 puntos**) Demuéstrese que si $f \in C^1([0,\pi])$ satisface $f(0) = c_1,\ f(\pi) = c_2$, entonces (1) tiene una única solución. Dar una fórmula (en términos de la función f y de las constantes c_1, c_2) que proporcione dicha solución. *Indicación: Hacer un cambio de variable $v(x,t) = u(x,t) + Mx + N$ para unas adecuadas constantes M y N.*

   (d) (**0.5 puntos**) En el caso particular de que $c_1 = c_2$ y la función f sea la constante c_1 (es decir $f(x) = c_1, \forall x \in [0,\pi]$), ¿Cuál es la solución $u(x,t)$ del anterior apartado?

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. tercer curso, 05/09/2007, segunda parte

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Considérese el problema

$$\begin{array}{c} \Delta u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \partial\Omega. \end{array} \tag{1}$$

   (a) (**1.5 puntos**) Demuéstrese que, mediante un cambio a coordenadas polares (ρ, ϕ), el problema (1) se transforma en

$$\begin{array}{c} \dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0,\ 0 < \rho < 1,\ \phi \in \mathbb{R}, \\ \\ u(1,\phi) = g(\phi),\ \phi \in \mathbb{R}, \end{array} \tag{2}$$

   donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función continua y 2π-periódica definida por $g(\phi) = f(cos\ \phi, sen\ \phi)$.

   (b) (**1 punto**) Demuéstrese que las funciones constantes y, para cada número natural n, las funciones

$$u_n(\rho, \phi) = \rho^n (A_n cos\ (n\phi) + B_n sen\ (n\phi)),$$

   donde A_n, B_n son números reales arbitrarios, son soluciones de la ecuación que aparece en (2).

   (c) (**1 punto**) Usando el apartado anterior, escríbase la fórmula (dada por una serie infinita) que resuelve (2).