Ejercicios de Análisis Funcional

Rafael Payá Albert

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

ANÁLISIS FUNCIONAL

Relación de Ejercicios N° 1

1. Dar un ejemplo de una distancia en un espacio vectorial, que no proceda de una norma.

2. Probar que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un mismo espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si, existen dos constantes estrictamente positivas α y β tales que

$$\alpha\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\,\|x\|_1$$

para todo $x \in X$.

3. Probar que, en un espacio normado, el cierre de una bola abierta coincide con la correspondiente bola cerrada. ¿Es cierta esa afirmación en cualquier espacio métrico?

4. Sea X un espacio normado y $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$. Se define

$$f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|} \qquad (x \in X).$$

Probar que f es un homeomorfismo de X sobre U.

5. Probar que un espacio normado X es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente de vectores de X es convergente.

6. Probar que en cualquier espacio de Banach la intersección de una sucesión decreciente de bolas cerradas nunca es vacía

7. Sea $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ la esfera unidad de un espacio normado X. Probar que X es completo si, y sólo si, S es completa.

8. Sea X un espacio vectorial topológico y M un subespacio de X, $M \neq X$. Probar que M tiene interior vacío y que $\overline{M}$ es un subespacio de X.

ANÁLISIS FUNCIONAL

Relación de Ejercicios N^{o} 2

(Fecha límite de entrega: 9 de noviembre)

1. Probar las desigualdades de Young, Hölder y Minkowski, discutiendo para cada una de ellas la posible igualdad.

2. Sea $1 \leq p < \infty$ y $x \in l_p$. Probar que para $p < q \leq \infty$ se tiene que $x \in l_q$ y $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. Probar también que $\lim\limits_{q\to\infty} \|x\|_q = \|x\|_\infty$.

3. Probar que si Λ es un conjunto no vacío arbitrario, el espacio l_∞^Λ de todas las funciones acotadas de Λ en $\mathbb{K}$, con la norma del supremo, es un espacio de Banach. ¿Cuando es separable?

4. Probar que la sucesión $\{e_n\}$ de los vectores unidad es una base de Schauder de c_0 y que, para todo $x \in c_0$, la serie $\sum\limits_{n\geq 1} x(n)\, e_n$ converge incondicionalmente en c_0. Denotando por e_0 a la sucesión constantemente igual a 1, probar también que la sucesión $\{e_{n-1}\}$ es una base de Schauder de c.

5. Dar un ejemplo de una sucesión:
a) Que converja en l_∞ pero no en l_1 ni en l_2.
b) Que converja en l_2 pero no en l_1.

6. Probar que si L es un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, el espacio $C_0(L)$ de las funciones continuas de L en $\mathbb{K}$ que se anulan en el infinito es un subespacio cerrado de l_∞^L, luego un espacio de Banach con la norma del máximo. Probar también que el espacio $C_{00}(L)$ de las funciones continuas de soporte compacto es un subespacio denso de $C_0(L)$. Mostrar con algún ejemplo concreto que $C_{00}(\mathbb{R}^N) \neq C_0(\mathbb{R}^N)$.

7. Probar las desigualdades integrales de Hölder y Minkowski, discutiendo la posible igualdad.

8. Probar las siguientes afirmaciones:
a) Si $1 \leq p < q < \infty$ y $f \in L_q[0,1]$, entonces $f \in L_p[0,1]$ y $\|f\|_p \leq \|f\|_q$
b) La inclusión recién probada es estricta. De hecho, fijado $1 \leq p < \infty$, existe $g \in L_p[0,1]$ tal que $g \notin L_q[0,1]$ para todo $q > p$
c) Si $f \in L_\infty[0,1]$ entonces $f \in L_p[0,1]$ para $1 \leq p < \infty$ pero el recíproco no es cierto
d) Para $1 \leq p, q \leq \infty$ los espacios $L_p(\mathbb{R})$ y $L_q(\mathbb{R})$ no son comparables. De hecho, para cada valor de p existe $f \in L_p(\mathbb{R})$ tal que $f \notin L_q(\mathbb{R})$ para todo $q \neq p$.

9. Para $t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x_n(t) = t^n \,, \quad y_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \,, \quad z_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$$

obteniendo tres sucesiones de funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Estudiar la convergencia de dichas sucesiones en cada uno de los siguientes espacios:
a) $L_p[0,1]$ con $1 \leq p < \infty$
b) $C[0,1]$ con la norma del máximo
c) El espacio $C^1[0,1]$ de las funciones de clase C^1 en el intervalo $[0,1]$ con la norma dada por

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty \qquad (x \in C^1[0,1])$$

10. Probar que para $1 \leq p < \infty$ el espacio de Banach $L_p[0,1]$ es separable, mientras que $L_\infty[0,1]$ no lo es.

ANÁLISIS FUNCIONAL

Relación de Ejercicios N^o 3

Fecha límite de entrega: 11 de diciembre

1. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea
a) Continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y discontinua en cualquier otro
b) Continua en $\mathbb{R}$ pero no uniformemente continua
c) Uniformemente continua en $\mathbb{R}$ pero no lipschitziana.

2. Sea X un espacio normado y $f \in X^*$, $f \neq 0$. Probar que

$$d(x, \ker f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \quad \forall\, x \in X$$

3. Probar que, para todo $N \in \mathbb{N}$, se tiene $\left(l_1^N\right)^* \equiv l_\infty^N$ y $\left(l_\infty^N\right)^* \equiv l_1^N$.

4. Probar que: $(l_1)^* \equiv l_\infty$ y $(c_0)^* \equiv l_1$.

5. Fijada una sucesión $y \in l_1$, para cada $x \in c_0$ se considera la sucesión Tx definida por

$$[Tx](n) = \sum_{k=n}^{\infty} x(k)\, y(k) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Probar que T es un operador lineal continuo de c_0 en sí mismo y calcular su norma.

6. En cada uno de los siguientes casos, comprobar que T es un operador lineal continuo del espacio $C[0,1]$ en sí mismo y calcular su norma:
a) $[Tf](x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad (x \in [0,1],\ f \in C[0,1])$.
b) $[Tf](x) = x^2 f(0) \quad (x \in [0,1],\ f \in C[0,1])$.
c) $[Tf](x) = f(x^2) \quad (x \in [0,1],\ f \in C[0,1])$.

7. Dada una sucesión $y \in l_\infty$, para $1 \leq p \leq \infty$ se define $T : l_p \to l_p$ mediante

$$[Tx](n) = x(n)\, y(n) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in l_p).$$

Probar que T es un operador lineal continuo y calcular su norma.

ANÁLISIS FUNCIONAL

Relación de Ejercicios Nº 4

1. Sea X un espacio vectorial, $\nu_1, \nu_2 : X \to \mathbb{R}$ dos seminormas y f un funcional lineal en X verificando que

$$|f(x)| \leq \nu_1(x) + \nu_2(x) \quad (x \in X).$$

Probar que existen dos funcionales lineales f_1 y f_2 en X tales que:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \; ; \quad |f_1(x)| \leq \nu_1(x) \; ; \quad |f_2(x)| \leq \nu_2(x) \quad (x \in X).$$

Indicación: Trabajar en el espacio vectorial producto $X \times X$.

2. Sea X un espacio normado real, M un subespacio vectorial de X y f, g funcionales lineales en M verificando que

$$|f(m)| + |g(m)| \leq \|m\| \quad (m \in M).$$

Probar que existen $F, G \in X^*$, que extienden a f y g respectivamente y verifican

$$|F(x)| + |G(x)| \leq \|x\| \quad (x \in X).$$

Indicación: Usar los funcionales $f + g$ y $f - g$.

3. Sea M un subespacio vectorial de un espacio normado X y $T \in L(M, l_\infty)$. Probar que existe $S \in L(X, l_\infty)$ que extiende a T y verifica $\|S\| = \|T\|$.

4. Consideremos el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ dado por $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$ y sea g el funcional lineal en Y definido por $g(t, 0) = t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Probar que g tiene una única extensión Hahn-Banach a l_2^2 mientras que admite infinitas extensiones Hahn-Banach a l_1^2.

5. Fijado $N \in \mathbb{N}$, probar que existe $f \in C[0,1]^*$ verificando que $f(P) = P'(0)$ para todo polinomio P de grado menor o igual que N. ¿Existe un funcional lineal y continuo f en $C[0,1]$ tal que $f(P) = P'(0)$ para todo polinomio P?

6. Sea X un espacio de Banach. Probar que si X^* contiene un subespacio cerrado propio que separa los puntos de X, entonces X no es reflexivo.

7. Sea T un operador lineal de un espacio de Banach X en un espacio normado Y. Se define una nueva norma $\|\cdot\|_0$ en X mediante la expresión

$$\|x\|_0 = \|x\| + \|Tx\| \qquad (x \in X).$$

Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
(a) T es continuo.
(b) La norma $\|\cdot\|_0$ es equivalente a la norma de partida $\|\cdot\|$.
(c) La norma $\|\cdot\|_0$ es completa.

8. Probar que si X e Y son espacios normados $T : X \to Y$ es un operador lineal con gráfica cerrada y $T(X)$ tiene dimensión finita, entonces T es continuo.

10. Sea X un espacio de Banach real y $T : X \to C[0,1]$ un operador lineal. Se considera, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el funcional lineal φ_n en X definido por

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 t^n \, [Tx](t) \, dt \qquad (x \in X).$$

Probar que T es continuo si, y sólo si, $\varphi_n \in X^*$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

11. Sea E un espacio métrico y X un espacio normado. Probar que una aplicación $T : E \to X$ es lipschitziana si, y sólo si, lo es $x^* \circ T$, para todo $x^* \in X^*$.

12. Sea X un espacio de Banach real y $T : X \to L_1[0,1]$ un operador lineal. Para cada conjunto medible $A \subseteq [0,1]$, se considera el funcional lineal I_A en X definido por

$$I_A(x) = \int_A [Tx](t) \, dt \qquad (x \in X).$$

Probar que T es continuo si, y sólo si, I_A es continuo para todo conjunto medible $A \subseteq [0,1]$.

Examen de Análisis Funcional

(Granada 10 de febrero de 2009)

Licenciatura en Matemáticas

1. Desarrollar uno de los temas siguientes:

   a) Espacios normados de dimensión finita.

   b) Versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach.

2. Sea X un espacio normado. Se dice que un funcional $f \in X^*$ alcanza su norma si existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|f\| = |f(x)|$.

   a) Probar que si X tiene dimensión finita, entonces todo funcional lineal en X alcanza su norma ¿Puede conseguirse la misma tesis con una hipótesis más general?

   b) Sea $f : c_0 \to \mathbb{K}$ definido por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$ para todo $x \in c_0$. Probar que f es lineal y continuo pero no alcanza su norma.

3. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando brevemente las respuestas:

   a) Todo funcional lineal definido en un espacio de Hilbert es continuo.

   b) Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una biyección lineal. Si T es continua y X es un espacio de Banach, entonces Y es un espacio de Banach.

   c) Sea X es un espacio vectorial dotado con dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ no equivalentes. Si M es un subespacio vectorial de X con dimensión finita, entonces la aplicación identidad $I_M : (M, \|\cdot\|) \to (M, |||\cdot|||)$ es un isomorfismo topológico.

Examen de Análisis Funcional

(Granada 10 de febrero de 2009)

Licenciatura en Matemáticas

1. Desarrollar uno de los temas siguientes:
   a) Versión Analítica del Teorema de Hahn-Banach.
   b) Teorema de la Aplicación Abierta

2. Se considera el espacio $C[0,1]$ de todas las funciones continuas en el intervalo [0,1] con valores reales, dotado con la norma del máximo, y el subespacio
$$X = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}.$$
Para $x \in X$ se define $f(x) = \displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt$. Probar que $f \in X^*$ y que $\|f\| = 1$.

3. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando brevemente las respuestas:
   a) Todo espacio de Hilbert es isométricamente isomorfo a su espacio dual.
   b) Sean X e Y espacios de Banach y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales continuos de X en Y. Si $\{T_n\}$ converge puntualmente en X, entonces $\{T_n\}$ converge uniformemente en algún subconjunto abierto no vacío de X.
   c) Sea X un espacio vectorial con dos normas completas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$, que no son equivalentes. Entonces la aplicación identidad $I_X : (X, \|\cdot\|) \to (X, |||\cdot|||)$ no es continua.

Examen de Análisis Funcional

(Granada 8 de septiembre de 2009)

Licenciatura en Matemáticas

1. Desarrollar uno de los temas siguientes:

   a) Teorema de Banach-Steinhaus.

   b) Teorema de la Gráfica Cerrada.

2. Probar que, para cada $x \in l_p$ $(1 < p < \infty)$, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{x(n)}{n}$ es absolutamente convergente y que definiendo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n} \quad (x \in l_p),$$

   se obtiene un funcional lineal continuo en l_p. Calcular $\|f\|$ y probar que f alcanza su norma, es decir, que existe $x \in l_p$ tal que $\|x\| = 1$ y $f(x) = \|f\|$.

3. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, justificando brevemente las respuestas:

   a) Si X, Y son espacios de Banach y la dimensión de Y es finita, entonces todo operador lineal de X sobre Y es continuo.

   b) Si $\{f_n\}$ es una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ para todo $x \in X$, se obtiene un operador lineal continuo de X en l_∞.

   c) Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio de H verificando que $M^\perp = \{0\}$, entonces $M = H$.