CAPÍTULO I

ÁLGEBRA LINEAL.

Tema 1. Espacios Vectoriales.

Notaremos por $\mathbb{R}$ al cuerpo de los números reales.

Definición 1.1. *Sea E un conjunto no vacío en el que se tiene definida una ley de composición interna (llamada suma):*

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \xrightarrow{+} & E \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & \alpha+\beta \end{array}$$

que verifica las siguientes propiedades:

1. **Asociativa:** $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ *para cualesquiera* $\alpha,\beta,\gamma\in E$.
2. **Conmutativa:** $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ *para cualesquiera* $\alpha,\beta\in E$.
3. **Existencia de elemento neutro:** *Existe un elemento en E, llamémoslo 0, tal que* $\alpha+0=\alpha$ *para todo* $\alpha\in E$.
4. **Elemento opuesto:** *Para todo* $\alpha\in E$*, existe un elemento en E, llamémoslo* $-\alpha$*, tal que* $\alpha+(-\alpha)=0$.

Se dice entonces que $(E,+)$ *es un* **grupo aditivo conmutativo o abeliano.**

Definición 1.2. *Dado E un conjunto no vacío, E es un* **espacio vectorial** *sobre* $\mathbb{R}$ *si existe una ley de composición interna $+$ respecto de la cual $(E,+)$ es un grupo conmutativo, y existe una ley de composición externa*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha,x) & \longmapsto & \alpha x \end{array}$$

verificando las siguientes propiedades:

1. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\ x,y\in E.$
2. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ x\in E.$
3. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ x\in E.$
4. $1x=x,\ \forall x\in E.$

A los elementos de E se les llamará **vectores** *y a los elementos de* $\mathbb{R}$ **escalares**.

Ejemplos 1.3.

1. $E = \mathbb{R}$.
2. $E = \mathbb{R}^n$, con la siguientes operaciones:

   Para cada $x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$,

   $$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),\ \alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n).$$

El siguiente resultado se deduce de manera inmediata de la definición de espacio vectorial.

Proposición 1.4. (Propiedades elementales). *Sea E un e.v. Entonces:*

1. $0x = 0$ *para todo* $x \in E$.
2. $\alpha 0 = 0$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. *Si* $\alpha x = 0$, *entonces* $\alpha = 0$ *ó* $x = 0$.
4. $(-\alpha)x = -(\alpha x) = \alpha(-x)$ *para cualesquiera* $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in E$.

Definición 1.5. *Sea E un e.v. y $F \subset E$. Se dice que F es un* **subespacio vectorial** *de E si, con las operaciones suma y producto (por escalar) heredadas de E, F es un espacio vectorial, esto es, para cualesquiera $x, y \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $x + y \in F$, $\alpha x \in F$.*

La siguiente caracterización de subespacio vectorial es inmediata.

Proposición 1.6. *Dado E un e.v. y $F \subset E$, F es un subespacio vectorial de E si, y sólo si, $\alpha x + \beta y \in F$, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in F$.*

Definición 1.7. *Sea E un e.v., $\{x_1,\dots,x_n\}$ una familia finita de vectores de E y $x\in E$. Se dice que x es una* **combinación lineal** *de la familia anterior si existen $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ tales que*

$$x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n.$$

Ejemplos 1.8.

1. El 0 de un e.v. es siempre combinación lineal de cualquier familia de vectores.
2. En $\mathbb{R}^2$ cualquier vector es combinación lineal de los vectores $(1,0),(0,1)$:

$$(a,b)=a(1,0)+b(0,1).$$

Definición 1.9. *Sea E un e.v. y $\{e_1,\dots,e_n\}$ una familia finita de vectores de E. Consideremos el siguiente subconjunto de E:*

$$F:=\{x\in E:\ x \text{ es combinación lineal de } \{e_1,\dots,e_n\}\}.$$

F es un subespacio vectorial de E, y se le llama **subespacio (vectorial) engendrado o generado** *por $\{e_1,\dots,e_n\}$. Se nota así:*

$$F=\langle e_1,\dots,e_n\rangle \ \text{ó}\ F=\operatorname{lin}\{e_1,\dots,e_n\}.$$

A la familia $\{e_1,\dots,e_n\}$ se le llama **sistema de generadores** *de F.*

Definición 1.10. *Sea E un e.v. y $\{e_1,\dots,e_n\}$ una familia de vectores de E. Se dice que los vectores $e_1,\dots,e_n$ son* **linealmente independientes** *(l.i.) si*

$$\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n=0\Rightarrow\lambda_i=0,\ i=1,\dots,n.$$

Se dice que $e_1,\dots,e_n$ son **linealmente dependientes** *(l.d.) si no son linealmente independientes, es decir, existen $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, con alguno distinto de cero, tales que $\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n=0$.*

Presentamos a continuación una sencilla caracterización de la dependencia lineal.

Proposición 1.11. *Sea* E *un e.v. y* $\{e_1,\dots,e_n\}$ *una familia de vectores de* E. *Los vectores* $e_1,\dots,e_n$ *son l.d. si, y sólo si, existe* $i\in 1,\dots,n$ *tal que* x_i *es combinación lineal de* $\{e_1,\dots,e_{i-1},e_{i+1},\dots e_n\}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $e_1,\dots,e_n$ son l.d. Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, con $\lambda_i\neq 0$, tal que $\lambda_1e_1+\dots+\lambda_ne_n=0$. Entonces, se tiene que

$$e_i=-\frac{1}{\lambda_i}(\lambda_1e_1+\dots+\lambda_{i-1}e_{i-1}+\lambda_{i+1}e_{i+1}+\dots+\lambda_ne_n).$$

Recíprocamente, supongamos que $e_i=\lambda_1e_1+\dots+\lambda_{i-1}e_{i-1}+\lambda_{i+1}e_{i+1}+\dots+\lambda_ne_n$. Entonces,

$$\lambda_1e_1+\dots+\lambda_{i-1}e_{i-1}+\lambda_{i+1}e_{i+1}+\dots+\lambda_ne_n-e_i=0.$$

∎

Ejemplos 1.12.

1. En $\mathbb{R}^3$, los vectores $(1,0,0),(0,1,0)$ son l.i.
2. En $\mathbb{R}^3$, los vectores $(1,0,0),(0,1,0),(2,2,0)$ son l.d.

Definición 1.13. *Sea* E *un e.v. Una* **base** *de* E *es un sistema de generadores de* E *cuyos vectores son l.i.*

Teorema 1.14. *Sea* E *un e.v. y* $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ *una base de* E. *Entonces, para cada* $x\in E$, *existen* $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$, *únicos, tales que* $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$.

DEMOSTRACIÓN. Dichos escalares existen, por ser B un sistema de generadores de E. Veamos ahora la unicidad. En efecto, sean $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}$ tales que $x=y_1e_1+\dots+y_ne_n$. Entonces, $(x_1-y_1)e_1+\dots+(x_n-y_n)e_n=0$. Luego, por ser $e_1,\dots,e_n$ l.i., se tiene que $x_i=y_i$, $i=1,\dots n$. ∎

Definición 1.15. *Sea E un e.v. y B una base de E. Para cada $x \in E$, a los coeficientes (únicos) que se obtienen del teorema anterior se les llama* **coordenadas** *de x respecto de la base B.*

Ejemplo 1.16. En $\mathbb{R}^2$, los vectores $(1,0),(0,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$. Así mismo, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. En general, la familia de vectores $\{e_1,\dots,e_n\}$, con $e_i = (\underbrace{0,\dots,0}_{i-1},1,0,\dots 0)$, $i = 1,\dots,n$, constituye una base de $\mathbb{R}^n$. A estas bases se les llama **bases canónicas**.

Teorema 1.17. *Sea E un e.v. y B una base de E formada por un número finito de vectores. Entonces todas las bases de E tienen el mismo cardinal, esto es, el mismo número de vectores. A ese cardinal se le llama* **dimensión** *de E, y se nota $\dim(E)$.*

Como consecuencia, se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Teorema 1.18. *Sea E un e.v. y F un subespacio vectorial de E. Entonces $\dim(F) \leq \dim(E)$.*

Dados U, V subespacios vectoriales de un e.v. E, es inmediato comprobar que los conjuntos

$$U \cap V = \{x \in E : \ x \in U,\ x \in V\}, \ \ U + V = \{u + v : \ u \in U,\ v \in V\}$$

son subespacios vectoriales de E. El siguiente resultado nos muestra la relación existente entre las dimensiones de dichos subespacios.

Teorema 1.19. *Sean U, V subespacios vectoriales de un e.v. E. Entonces:*

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

Definición 1.20. *Dado E un e.v. y U, V dos subespacios vectoriales suyos, se dice que E es* **suma directa** *de U y V, y se nota $E = U \oplus V$, si $E = U + V$ y $U \cap V = \{0\}$. Equivalentemente, si para cada $x \in E$ existen $u \in U$, $v \in V$, determinados de forma única, tales que $x = u + v$.*

Tema 2. Aplicaciones lineales.

Definición 2.1. *Sean* E,F *dos e.v. y* $f : E \longrightarrow F$ *una aplicación. Se dice que* f *es una* **aplicación lineal** *si:*

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *para cualesquiera* $x,y \in E$.
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *para cualesquiera* $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$.

A las aplicaciones lineales se les llama también **homomorfismos.** *Una aplicación lineal e inyectiva recibe el nombre de* **monomorfismo.** *Un* **epimorfismo** *es una aplicación lineal y sobreyectiva. Toda biyección lineal se llama* **isomorfismo.** *Dos espacios vectoriales E, V se dicen* **isomorfos** *si existe un isomorfismo entre ambos, y se nota* $E \cong V$.

Ejemplos 2.2. Sea E un e.v. Las siguientes aplicaciones $f : E \longrightarrow E$ son lineales:

1. $f(x) = 0,\ \forall x \in E$.
2. $f(x) = \lambda x,\ \forall x \in E$ (λ es un número real fijo).

Los resultados que siguen nos muestran propiedades elementales de las aplicaciones lineales.

Proposición 2.3. *Sean* E,F *e.v. y* $f : E \longrightarrow F$.

1. f *es lineal si, y sólo si,* $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ *para cualesquiera* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x,y \in E$.
2. *Si* f *es lineal, entonces:*
    - a) $f(0) = 0$.
    - b) $f(-x) = -f(x)$ *para todo* $x \in E$.
    - c) $f(x-y) = f(x) - f(y)$ *para cualesquiera* $x,y \in E$.
    - d) f *transforma vectores l.d. de* E *en vectores l.d. de* F.

Proposición 2.4. *Sean E,F e.v., $f,g : E \longrightarrow F$ aplicaciones lineales y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces las aplicaciones $f+g, \lambda f : E \longrightarrow F$ definidas por:*

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \ \ (\lambda f)(x) := \lambda f(x), \ \forall x \in E,$$

son también lineales. Además, con estas operaciones, el conjunto $\mathfrak{L}(E,F)$ de aplicaciones lineales de E en F es un e.v.

Proposición 2.5. *Sean E,F,G e.v. y $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ aplicaciones lineales. Entonces la aplicación $g \circ f : E \longrightarrow G$ definida por:*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \ \forall x \in E,$$

es también lineal.

Proposición 2.6. *Sean E, F e.v. y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación biyectiva y lineal. Entonces f^{-1} también es lineal.*

El resultado anterior nos dice que la aplicación inversa de un isomorfismo es también un isomorfismo. Asociados a una aplicación lineal existen subespacios vectoriales espaciales, que presentamos a continuación.

Definición 2.7. *Sean E, F, e.v. y $f : E \longrightarrow F$ un aplicación lineal. Se define el* **núcleo** *de f como*

$$\mathrm{Ker}(f) := \{x \in E : \ f(x) = 0\}.$$

La **imagen** *de f se define:*

$$\mathrm{Im}(f) := \{y \in F : \ \exists x \in E, \ y = f(x)\}.$$

Es trivial demostrar que $\mathrm{Ker}(f)$ *es un subespacio vectorial de E y que* $\mathrm{Im}(f)$ *es un subespacio vectorial de F.*

Teorema 2.8. *Sean E, F e.v. y* $f : E \longrightarrow F$ *una aplicación lineal. Entonces:*

1. f *es inyectiva si, y sólo si,* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

2. f *es sobreyectiva si, y sólo si,* $\mathrm{Im}(f) = F$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Supongamos que f es inyectiva. Sea $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Entonces, $f(x) = 0 = f(0)$. Luego, por ser f inyectiva, $x = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ y sean $x, y \in E$ con $f(x) = f(y)$. Entonces, $f(x - y) = 0$. Luego, $x - y = 0$.

2. Se deduce de la definición de aplicación sobreyectiva. ∎

Teorema 2.9. *Sean E, F e.v. y* $f : E \longrightarrow F$ *una aplicación lineal. Entonces:*

1. f *transforma subespacios vectoriales de E en subespacios vectoriales de F, esto es, si U es un subespacio vectorial de E, entonces* $f(U)$ *es un subespacio vectorial de F.*

2. f *transforma sistemas de generadores de E en sistemas de generadores de* $\mathrm{Im}(f)$. *En particular,* f *es sobreyectiva (epimorfismo) si, y sólo si, transforma sistemas de generadores de E en sistemas de generadores de F.*

3. f *es inyectiva (monomorfismo) si, y sólo si,* f *transforma vectores l.i. de E en vectores l.i de F.*

4. *Si* f *es inyectiva, entonces* f *transforma bases de E en bases de* $\mathrm{Im}(f)$. *En particular, si* f *es biyectiva, entonces* f *transforma bases de E en bases de F.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Es inmediato.

2. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ un sistema de generadores de E. Dado $y \in \mathrm{Im}(f)$, existe $x \in E$ tal que $f(x) = y$. Por otra parte, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Luego, por ser f lineal, $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 f(e_i)$.

3. Supongamos que f es inyectiva, y consideremos una familia de vectores l.i. $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker}(f)$. Por el Teorema 2.8, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Por ser los vectores $e_1,\ldots,e_n$ l.i., se tiene que $\lambda_i = 0,\ i = 1,\ldots,n$.

Recíprocamente, Por el Teorema 2.8, hay que probar que $\operatorname{Ker}(f) = 0$. En efecto, sea $x \in \operatorname{Ker}(f)$ $(f(x) = 0)$. Ya que $\{0\}$ es l.d., se tiene que $\{x\}$ es también l.d., luego se ha de cumplir que $x = 0$.

4. Es consecuencia inmediata de los apartados 2 y 3. ∎

Observación. Como consecuencia del apartado 2 del teorema anterior, tenemos que toda aplicación lineal queda determinada cuando se conocen las imágenes de los vectores de una base del dominio.

Teorema 2.10. *Sea E un e.v. Entonces* $\dim(E) = n$ *si, y sólo si, E es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ ($E \cong \mathbb{R}^n$).*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\dim(E) = n$ y sea $\{u_1,\ldots,u_n\}$ una base de E. Definimos $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$f(x) = (x_1,\ldots,x_n) \left(= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right),$$

donde $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ y $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$. (Obsérvese que f está bien definida, por la unicidad de las coordenadas de x). Es trivial demostrar que f es lineal. Veamos que f es inyectiva. En efecto, sea $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Entonces, por la definición de f, $x_i = 0,\ i = 1,\ldots,n$. Luego, $x = 0$ y f es inyectiva por el Teorema 2.8. Para demostrar la sobreyectividad, dado $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, basta tomar $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ y tener en cuenta la definición de f.

Recíprocamente, sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ un isomorfismo. Ya que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ y f lleva bases de $\mathbb{R}^n$ a bases de E (Teorema 2.9), se tiene que $\dim(E) = n$. ∎

Teorema 2.11. *Sean E, F e.v. y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Entonces*

$$\dim(E) = \dim((\mathrm{Ker}(f)) + \dim((\mathrm{Im}(f)).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\dim(E) = n$. Sea $\{e_1,\ldots,e_m\}$ una base de $\mathrm{Ker}(f)$ (es claro que $m \leq n$) y sea $\{y_1,\ldots,y_p\}$ una base de $\mathrm{Im}(f)$. Por la Proposición 2.9, $n \geq p$. Sean ahora $x_1,\ldots,x_p \in E$ tales que $f(x_i) = y_i$, $i = 1,\ldots,p$. Vamos a demostrar que $\{e_1,\ldots,e_m,x_1,\ldots,x_p\}$ es una base de E. En efecto, veamos primero que dichos vectores son l.i.: supongamos que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j x_j = 0.$$

Entonces,

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j.$$

Ya que $y_1,\ldots,y_p$ son l.i., se tiene que $\mu_i = 0$, $i = 1,\ldots p$. Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i = 0.$$

Luego, por la independencia lineal de $e_1,\ldots,e_m$, obtenemos que $\lambda_i = 0$, $i = 1,\ldots,m$.

Finalmente, veamos que $\{e_1,\ldots,e_m,x_1,\ldots,x_p\}$ es un sistema de generadores de E. En efecto, sea $x \in E$. Entonces, existen $\mu_1,\ldots,\mu_p \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j = f\left(\sum_{j=1}^{p} \mu_j x_j\right).$$

Por tanto, $x - \sum_{j=1}^{p} \mu_j x_j \in \mathrm{Ker}(f)$. Por consiguiente, existen $\lambda_1,\ldots\lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$x - \sum_{j=1}^{p} \mu_j x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i,$$

como queríamos demostrar. ∎

Tema 3. Matrices.

Definición 3.1. *Llamaremos* **matriz** *A de m filas y n columnas:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

A $m \times n$ se le llama **orden** *de la matriz. Notaremos $\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ de números reales.*

A continuación establecemos las operaciones que se pueden realizar con matrices:

1. **Suma:** Dadas $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se define
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$
2. **Producto por escalar:** Dada $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define
$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$
3. **Producto:** Dadas $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathfrak{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, se define $A \cdot B = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$ así:
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},\ i = 1,\dots m,\ j = 1,\dots p.$$

Observación: En general, el producto de matrices no es conmutativo. Basta considerar, por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A toda aplicación lineal se le puede asociar una matriz. En efecto, sean E, F e.v., $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E, $B' = \{e'_1, \dots, e'_m\}$ una base de F y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Supongamos que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{m1}e'_m \\ f(e_2) &= a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{m2}e'_m \\ &\vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{mn}e'_m \end{aligned}$$

Dado $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $f(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j e'_j$. Por otra parte, se tiene

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} e'_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right) e'_j$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{aligned}$$

Llamaremos matriz de f asociada a las bases B y B',

$$M(f,B,B') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Entonces, la expresión matricial de f queda así:

$$Y = M(f,B,B')X,$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

La demostración de los dos siguientes resultados la omitimos por trivial.

Proposición 3.2. *Sean E, F e.v., B, B' bases de E y F, respectivamente, y* $f,g : E \longrightarrow F$ *aplicaciones lineales. Entonces:*

$$M(f+g,B,B') = M(f,B,B') + M(g,B,B').$$

Proposición 3.3 . *Sean E, F, G e.v., B, B', B" bases de E, F, G, respectivamente, y* $f : E \longrightarrow F$*,* $g : F \longrightarrow G$ *aplicaciones lineales. Entonces:*

$$M(g \circ f, B, B'') = M(g, B', B'') \cdot M(f, B, B').$$

Presentamos en el siguiente listado algunos tipos de matrices importantes:

Ejemplos 3.4.

1. **Matriz cuadrada:** $m = n$ (el mismo número de filas que de columnas). Se llama n al orden de la matriz y se nota $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ al conjunto de matrices cuadradas de orden n.

2. **Matriz unidad:** Dado n, se define

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

En otras palabras, $I_n = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

3. **Matriz escalar:** Es de la forma aI_n, es decir,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

4. **Matriz diagonal:** Es de la forma

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

donde $a_1, \alpha_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

5. **Matriz triangular.**
    1. *a*) **Superior:**
    $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
    Esto es, $a_{ij} = 0$, para $i > j$.
    2. *b*) **Inferior:**
    $$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
    Es decir, $a_{ij} = 0$, para $i < j$.
6. **Matriz inversible o regular:** $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es inversible o regular si existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. La matriz B es única y se llama **matriz inversa** de A, y se nota $B = A^{-1}$.

Sean E un e.v. y $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dos bases de E. Dado $x \in E$, supongamos conocidas las coordenadas $x_1, \dots, x_n$ de x respecto de la base B. Nos preguntamos entonces cuáles serán las coordenadas de x respecto de la base B'. Notemos $x'_1, \dots, x'_n$ a esas coordenadas y supongamos que conocemos las coordenadas de cada e_i respecto de la base B':

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{n1}e'_n \\ e_2 &= a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{n2}e'_n \\ &\vdots \\ e_n &= a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{nn}e'_n \end{aligned}$$

En tal caso,

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) e'_i.$$

Por lo tanto, se tiene

$$x'i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \; i = 1, \dots n.$$

Si llamamos $P = (a_{ij})$, matricialmente nos quedaría lo siguiente:

$$X' = P \cdot X,$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

La matriz P se llama **matriz de cambio de base** de B a B'.

El cambio de base también se puede tratar desde el punto de vista de aplicaciones lineales. En efecto, sea $I : E \longrightarrow E$ la aplicación identidad, esto es, $I(x) = x$, para todo $x \in E$. Entonces se tiene que

$$P = M(I, B, B').$$

Para calcular ahora la matriz Q de cambio de base de B' a B, basta tener en cuenta que la matriz P es inversible, por ser I una aplicación biyectiva, y tendríamos que

$$Q = P^{-1} = M(I, B', B).$$

Tratamos a continuación el cambio de base para aplicaciones lineales.

Sean E, F e.v., B, B' bases de E, C, C' bases de F y $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal. Queremos saber la relación entre $M = M(f, B, C)$ y $M' = M(f, B', C')$. Para ello, notemos P y Q a las matrices de cambio de base de B a B' y de C a C', respectivamente. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(E,B) \arrow[r, "f"] & (F,C) \arrow[d, "I_F"] \\
(E,B') \arrow[u, "I_E"] \arrow[r, "f"] & (F,C')
\end{tikzcd}$$

Entonces, por la Proposición 3.3,

$$M' = Q \cdot M \cdot P^{-1}.$$

Definición 3.5. *Dada $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama* **matriz traspuesta** *de A a la matriz $A^t = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, donde $b_{ij} = a_{ji}$. Obsérvese que se trata simplemente de cambiar filas por columnas.*

Proposición 3.6.

1. *$(A+B)^t = A^t + B^t$, para cualesquiera $A, B \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.*
2. *$(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, para cualesquiera $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathfrak{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$.*
3. *Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es inversible, entonces A^t también es inversible con $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Definición 3.7. *Sea $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Se define el* **determinante** *de A, y se nota $|A|$, como sigue:*

1. *$n = 2$: $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.*
2. *$n = 3$ (***regla de Sarrus***): $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.*
3. *n cualquiera: LLamemos A_{ij} a la matriz de orden $n-1$ que se obtiene de A eliminando la fila i y la columna j. Se define el* **cofactor** *del elemento a_{ij} como $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$. Entonces,*
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}.$$

Enumeramos a continuación las propiedades de los determinantes.

Proposición 3.8. *Sean $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.*

1. *El determinante de A no depende de la fila respecto a la que se desarrolle, esto es,*
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij},\ \forall i = 1,\dots,n.$$
2. *El determinante de A se puede calcular desarrollando por columnas, es decir,*
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij},\ \forall j = 1,\dots,n.$$
3. *$|A| = |A^t|$.*
4. *$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.*

5. *Si A tiene una fila o una columna de ceros, entonces* $|A| = 0$.

6. *Si en A se multiplica una fila o una columna por un escalar, entonces el determinante obtenido es el siguiente:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda |A|.$$

7. *Si A tiene dos filas o dos columnas iguales o proporcionales, entonces* $|A| = 0$.

8. *Si en una fila o en una columna de A aparece la suma de dos términos, entonces se obtiene el siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

9. *Si la matriz B se obtiene de A sumando a una fila (o columna) de ésta los elementos de otra fila (o columna) multiplicados por un escalar, entonces* $|B| = |A|$.

Definición 3.9. *Dada* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *se llama* **matriz adjunta** *de A, y se nota* A^*, *a la matriz de cofactores de A.*

Teorema 3.10. *Dada* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, *A es inversible si, y sólo si,* $|A| \neq 0$. *En caso afirmativo,*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^t.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A es inversible. Entonces, $A \cdot A^{-1} = I_n$. Luego, $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. Por lo tanto, $|A| \neq 0$.

Recíprocamente, supongamos que $|A| \neq 0$. Es fácil comprobar que

$$A \cdot (A^*)^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \dots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I_n.$$

▮

Tema 4. Sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 4.1. *Dada* $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, un* **menor** *de orden* k *(*$1 \leq k \leq \min\{m,n\}$*) de* A *es el determinante de una matriz cuadrada (de orden k) construida intersecando k filas y columnas de A. Al mayor de los órdenes de los menores no nulos se le llama* **rango** *de la matriz A, y se nota* $r(A)$*.*

Teorema 4.2. *El rango de una matriz coincide con el número de filas (o columnas) linealmente independientes.*

Definición 4.3. *Un sistema de ecuaciones lineales se define así:*

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (1)$$

La nomenclatura usada es la siguiente:

- $x_i,\ i = 1,\ldots,n$*, se llaman* **incógnitas** *del sistema.*
- $a_{ij},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$*, son los* **coeficientes** *del sistema.*
- $b_j,\ j = 1,\ldots,m$*, son los* **términos independientes** *del sistema.*

Definición 4.4. *Una* **solución** *del sistema (1) es un vector* $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ *que verifique las m ecuaciones. Resolver el sistema (1) es encontrar el conjunto S de todas las soluciones de dicho sistema. Puede ocurrir varias cosas:*

1. $S=\emptyset$. *En tal caso, el sistema se dice* **incompatible (SI).**
2. $S\neq\emptyset$. *Entonces el sistema se llama* **compatible.** *En esta situación existen dos alternativas:*
    a) *S es un conjunto unitario (el sistema tiene una única solución). Entonces tenemos un* **sistema compatible determinado (SCD).**
    b) *S tiene más de un elemento (el sistema tiene más de una solución). Entonces se tiene un* **sistema compatible indeterminado (SCI).**

Presentamos ahora la interpretación matricial de un sistema de ecuaciones lineales. Para ello, dado el sistema (1), se llama **matriz asociada** a este sistema a la matriz de coeficientes $A=(a_{ij})$. Si ahora notamos

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

el sistema (1) quedaría así:

$$A\cdot X=B.$$

A continuación damos la interpretación vectorial de un sistema de ecuaciones lineales.

Sean E,F e.v., con $\dim(E)=n$ y $\dim(F)=m$, B y B' bases de E y F, respectivamente, y $f:E\longrightarrow F$ una aplicación lineal. Notemos $A=M(f,B,B')$. Dado $x\in E$, sean $x_1,\ldots,x_n$ sus coordenadas respecto de la base B, y dado $b\in F$, sean $b_1,\ldots,b_m$ sus coordenadas respecto de la base B'. Entonces, resolver el sistema (1) es encontrar $x\in E$ tal que $f(x)=b$. Pueden ocurrir las siguientes cosas:

1. $b\notin \mathrm{Im}(f)$. Entonces tenemos un SI.
2. $b\in \mathrm{Im}(f)$. Entonces se tiene un sistema compatible.

Observaciones:

1. Si f es sobreyectiva, entonces el sistema es compatible, ya que $\mathrm{Im}(f)=F$.
2. Si f es inyectiva, tenemos dos casos:
   - *a*) Si $b\in \mathrm{Im}(f)$, entonces se tiene un SCD.
   - *b*) Si $b\notin \mathrm{Im}(f)$, entonces tenemos un SI.
3. Si f es biyectiva, entonces estamos ante un SCD.

Definición 4.5. *El sistema (1) es llamado un* **sistema de Cramer** *si $m=n$ (mismo número de ecuaciones que de incógnitas) y $|A|\neq 0$.*

Damos ahora un método para resolver un sistema de Cramer.

Proposición 4.6. (Regla de Cramer). *Supongamos que (1) es un sistema de Cramer. Entonces, (1) es un SCD y su solución es:*

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|},\ \dots,x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & b_n\end{vmatrix}}{|A|}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $A\cdot X=B$ la expresión matricial de (1). Entonces, por el Teorema 3.10 se tiene que

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{|A|}(A^*)^t\cdot B.$$

Ahora, unos sencillos cálculos nos permiten obtener el resultado deseado. ∎

Estudiamos ahora la resolución de un sistema de ecuaciones lineales en general. En el sistema (1), llamamos **matriz ampliada** a la matriz

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

Esto es, añadimos a la matriz A la columna de términos independientes.

Teorema 4.7. (Teorema de Rouché-Frobenius). *El sistema (1) es compatible si, y sólo si,* $r(A) = r(\tilde{A}) = r$*. En tal caso, pueden ocurrir dos cosas:*

1. *Si* $r < n$*, entonces estamos ante un SCI.*
2. *Si* $r = n$*, entonces se tiene un SCD.*

Pasamos a continuación a la resolución de un sistema compatible. Para facilitar la notación, suponemos que las r primeras filas y las r primeras columnas de la matriz A son linealmente independientes (estamos teniendo en cuenta el Teorema 4.2), esto es,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pueden ocurrir dos cosas:

1. $r = m$ (recordemos que m es el número de ecuaciones del sistema (1)).
   - 1.1 $r = m = n$. Tenemos un sistema de Cramer.
   - 1.2 $r = m < n$. Las incógnitas $x_1, \dots, x_r$ se llaman **incógnitas principales** y $x_{r+1}, \dots, x_n$ se llaman **incógnitas dependientes** (parámetros). Ahora el sistema (1) queda convertido en el siguiente Sistema de Cramer:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n) \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n) \end{aligned}$$

La solución queda en función de $n - r$ parámetros.

2. $r < m$. Ya que las r primeras filas son linealmente independientes, entonces el sistema (1) queda reducido al sistema formado por las llamadas **ecuaciones principales**:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned}$$

Con lo cual estamos en el caso anterior.

Pasamos a estudiar un caso particular de sistemas de ecuaciones lineales: los sistemas homogéneos.

Definición 4.8. *Un sistema de ecuaciones lineales se dice* **homogéneo** *si todos los términos independientes son nulos:*

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{array}\right\} (*)$$

Al ser nulos los términos independientes, es claro que $r(A)=r(\tilde{A})$, con lo cual todo sistema homogéneo es compatible. Además, es claro que $(0,\ldots,0)$ es una solución de dicho sistema, llamada **solución trivial.** Llamando $r=r(A)$, se tiene:

1. Si $r=n$, entonces $(*)$ es un SCD y la única solución es la trivial.

2. Si $r<n$, entonces $(*)$ es un SCI.

Pasamos a la resolución de sistemas compatibles. La idea es transformar el sistema dado en otro sistema equivalente (esto es, un sistema con las mismas soluciones) más sencillo de resolver. El método más clásico es el llamado **método de Gauss**, que consiste en pasar de un sistema a otro cuya matriz de coeficientes sea una matriz triangular superior. Veámoslo con varios ejemplos:

Ejemplos 4.9.

1. Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcc} x+y+z & = & 11 \\ 2x-y+z & = & 5 \\ 3x+2y+z & = & 24 \end{array}$$

Sea A la matriz de coeficientes. Entonces, $|A|=5\neq 0$. Luego, tenemos un sistema de Cramer (SCD). El sistema en coeficientes quedaría así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{array}\right)$$

Multiplicamos la $1^{\underline{a}}$ fila por -2 y la sumamos a la $2^{\underline{a}}$ fila. Así mismo, multiplicamos la $1^{\underline{a}}$ fila por -3 y la sumamos a la $3^{\underline{a}}$ fila, quedándonos lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right)$$

Ahora intercambiamos la 2ª y la 3ª fila:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \end{array}\right)$$

Si multiplicamos la 2ª fila por -3 y la sumamos a la 3ª fila, nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 11 \\ -y-2z & = & -9 \\ 5z & = & 10 \end{array}$$

Luego,

$$5z = 10 \Rightarrow \boxed{\text{z = 2}},$$

$$-y-4 = -9 \Rightarrow \boxed{\text{y = 5}},$$

$$x+5+2 = 11 \Rightarrow \boxed{\text{x = 4}}.$$

2. Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} 2x-4y+6z & = & 2 \\ y+2z & = & -3 \\ x+3y+z & = & 4 \end{array}$$

Sea A la matriz de coeficientes y $\tilde{A}$ la matriz ampliada. Es fácil comprobar que $r(A) = r(\tilde{A}) = 2 < 3$, luego tenemos un SCI con $3-2 = 1$ parámetro. El sistema en coeficientes es el siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Dividimos por 2 la 1ª:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Ahora multiplicamos por -1 la 1ª y la sumamos a la 3ª:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Observemos que la 3ª se obtiene simplemente cambiando de signo la 2ª fila. Por tanto, nos queda el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} x-2y+3z & = & 1 \\ y+2z & = & -3 \end{array}$$

Entonces, llamando $\boxed{z=\lambda}$, tenemos:

$$\boxed{y=-3-2\lambda},$$

$$x-2(-3-2\lambda)+3\lambda \Rightarrow \boxed{x=-7\lambda-5}.$$

Sean E un e.v. con $\dim(E)=n$, F un subespacio suyo con $\dim(F)=r$, B una base de E y $\{u_1,\dots,u_r\}$ una base de F. Para cada $i=1,\dots,r$, sean $(a_{1i},\dots,a_{ni})$ las coordenadas de u_i respecto de la base B. Dado $x\in F$, notemos $(x_1,\dots,x_n)$ a las coordenadas de x respecto de la base B, y $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ a sus coordenadas respecto de la base $\{u_1,\dots,u_r\}$. Entonces,

$$\begin{array}{c} x_1=a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\cdots+a_{1r}\lambda_r \\ x_2=a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\cdots+a_{2r}\lambda_r \\ \vdots \\ x_n=a_{n1}\lambda_1+a_{n2}\lambda_2+\cdots+a_{nr}\lambda_r \end{array}$$

Las ecuaciones anteriores reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas** de F. Llamemos $A=(a_{ij})$. Observamos que $r(A)=r$ ($u_1,\dots,u_r$ son l.i.). Por otra parte, por el Teorema de Rouché-Frobenius, $x\in F$ si, y sólo si, $r(A)=r(\tilde{A})$. Supongamos que $r(A)=r(\tilde{A})=r$ y que las r primeras columnas de A son linealmente independientes, esto es,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Entonces, todos los menores de orden $r+1$ de la matriz $\tilde{A}$ son nulos. En particular, tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & x_r \\ a_{r+11} & \dots & a_{r+1r} & x_{r+1} \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & x_r \\ a_{r+21} & \dots & a_{r+2r} & x_{r+2} \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & x_r \\ a_{n1} & \dots & a_{nr} & x_n \end{vmatrix}=0.$$

Aparecen entonces $n - r$ ecuaciones, llamadas **ecuaciones características o implícitas** de F. Para calcular las ecuaciones paramétricas a partir de las ecuaciones características, sólo hay que resolver el sistema homogéneo formado por estas últimas ecuaciones.

Ejemplos 4.10.

1. Calcular las ecuaciones cartesianas del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los siguientes vectores:

   $$(1,-1,0,0),\ (0,1,1,0),\ (2,-1,1,0),\ (3,-3,0,0).$$

   Consideremos la matriz

   $$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & x_1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \end{array}\right)}_{\tilde{A}}$$

   with inner brace: $\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}$

   Se comprueba de manera inmediata que $r(A) = 3$. Luego,

   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ -1 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

   Calculando el determinante anterior, la ecuación característica es:

   $$x_4 = 0.$$

2. Calcular las ecuaciones paramétricas y una base del subespacio de $\mathbb{R}^5$ de ecuaciones cartesianas:

   $$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_3 + x_5 & = & 0 \\ x_4 - 2x_1 & = & 0 \end{array}$$

   LLamando $x_1 = \lambda$ y $x_3 = \mu$, obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas:

   $$\begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\lambda + \mu \\ x_3 = \mu \\ x_4 = 2\lambda \\ x_5 = -\mu \end{array}$$

Ahora, tomando $\lambda = 1,\ \mu = 0$, obtenemos el vector $(1,-1,0,2,0)$ y para $\lambda = 0,\ \mu = 1$, $(0,1,1,0,-1)$. Dichos vectores forman una base del subespacio.

Tema 5. Espacios vectoriales euclídeos.

Definición 5.1. *Un* **producto escalar** *en un espacio vectorial E es una aplicación* $\langle\ ,\ \rangle : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *que verifica las siguientes propiedades:*

1. $\langle x,y\rangle \geq 0$ *para cualesquiera* $x,y\in E$.
2. $\langle x,x\rangle = 0$ *si, y sólo si,* $x=0$.
3. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ *para cualesquiera* $x,y\in E$.
4. $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$ *para cualesquiera* $x,y,z\in E$.
5. $\langle x,\lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$, *para todo* $\lambda\in\mathbb{R}$, *para cualesquiera* $x,y\in E$.

Al par $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ *se le llama* **espacio vectorial euclídeo.**

De la anterior definición se deducen las siguientes propiedades inmediatas:

Proposición 5.2. *Sea* $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo. Entonces:*

1. $\langle 0,x\rangle = 0$ *para todo* $x\in E$.
2. *Dado* $x\in E$*, si* $\langle x,y\rangle = 0$ *para todo* $y\in E$*, entonces* $x=0$.

Ejemplo 5.3. La aplicación $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n,$$

donde $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$, es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$, llamado **producto escalar usual.** (Nótese que para $n=1$, este producto escalar no es otra cosa que el producto de números reales).

Sea $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo con $dim(E)=n$ y sea $B=\{e_1,\ldots,e_n)$ una base de E. Dados $x,y\in E$, si $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum_{j=1}^n y_je_j$, entonces tenemos

$$\langle x,y\rangle=\langle\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\rangle\sum_{i=1}^n x_i\langle e_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\left(\sum_{j=1}^n y_j\langle e_i,e_j\rangle\right)=\sum_{i,j=1}^n x_iy_j\langle e_i,e_j\rangle.$$

Si ahora consideramos la matriz de orden n, $A=(a_{ij})$, donde $a_{ij}=\langle e_i,e_j\rangle$ para $i,j=1,\ldots n$, entonces tenemos que $a_{ii}>0$, $i=1,\ldots,n$ y que $a_{ij}=a_{ji}, i,j=1,\ldots,n$ (esto es, la matriz A es simétrica) y el producto escalar quedaría:

$$\langle x,y\rangle=(x_1,\ldots,x_n)\,A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

Añadiendo una pequeña hipótesis a la matriz A, el recíproco también es cierto, como vemos a continuación.

Teorema 5.4. *Sean E un espacio vectorial n-dimensional, $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de E y $A=(a_{ij})\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ verificando las siguientes propiedades:*

1. *$a_{ii}>0$, $i=1,\ldots,n$.*
2. *A es simétrica.*
3. *$|A_i|>0$, $i=1,\ldots,n$ donde, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, A_i es la submatriz de A formada por las i primeras filas y columnas.*

Entonces la aplicación $\langle\ ,\ \rangle : E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$\langle x,y\rangle=(x_1,\ldots,x_n)\,A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\qquad\forall x,y\in E,$$

donde $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum_{j=1}^n y_je_j$, es un producto escalar en E.

Ejemplo 5.5. Si consideramos $\mathbb{R}^3$ con la base canónica, comprobar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

define un producto escalar y dar su expresión.

Definición 5.6. *Sea* $(E, \langle , \rangle)$ *un espacio espacio vectorial euclídeo. Se define la* **norma** *de un vector* $x \in E$, $||x|| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Ejemplo 5.7. En $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual, la norma de un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ sería $||x|| = \sqrt{?`x_1^2 + \cdots x_n^2}$.

Recogemos en el siguiente resultado algunas propiedades de la norma.

Proposición 5.8. *Sea* $(E, \langle , \rangle)$ *un espacio vectorial euclídeo. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. $||x|| \geq 0$ *para todo* $x \in E$.
2. $||x|| = 0$ *si, y sólo si* $x = 0$.
3. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*, para todo* $x \in E$.
4. *Desigualdad de Schwarz:* $|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| ||y||$ *para cualesquiera* $x, y \in E$.
5. *Desigualdad triangular:* $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *para cualesquiera* $x, y \in E$.

En lo que sigue, E denotará un espacio vectorial euclídeo.

Definición 5.9. *Un vector* $x \in E$ *se dice* **unitario** *si* $||x|| = 1$.

Definición 5.10. *Dos vectores* $x, y \in E$ *se dicen* **ortogonales** *si* $\langle x, y \rangle = 0$*, y se notará* $x \perp y$.

Ejemplo 5.11. En $\mathbb{R}^n$, los vectores de la base canónica son unitarios y ortogonales entre sí.

Teorema 5.12. (Teorema de Pitágoras). *Sean* $x,y \in E$ *con* $x \perp y$*. Entonces*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

∎

Definición 5.13. *Supongamos que* $dim(E) = n$ *y sea* $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base de E. Se dice que B es una base ortogonal si* $e_i \perp e_j$ *para* $i \neq j$*. Si además* e_i *es unitario,* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, se dice que la base B es ortonormal.*

Si tenemos una base ortogonal, podemos conseguir de manera trivial un base ortonormal, sin más que dividir cada vector por su norma. Vamos a ver que también podemos conseguir una base ortonormal a partir de una base cualquiera dada.

Proposición 5.14. *Si* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *es una familia de vectores ortogonales no nulos de E, entonces* $e_1, \ldots, e_n$ *son linealmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$. Entonces, dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene

$$0 = \langle \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, e_i\rangle = \lambda_i \|e_i\|^2.$$

Por tanto, $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. ∎

Teorema 5.15. (Método de ortogonalización de Gramm-Schmidt). *Supongamos que* $dim(E) = n$ *y sea* $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *una de E. Se construye una base ortogonal* $\{u_1, \ldots, u_n\}$ *de manera recurrente como sigue:*

1. Definimos $u_1 = e_1$.

2. Definimos $u_2 = e_2 + \lambda_{12} u_1$. *Calculamos* λ_{12} *imponiendo que* $u_1 \perp u_2$. *Entonces*

$$0 = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, e_2 \rangle + \lambda_{12} \langle u_1, u_1 \rangle.$$

Despejando, obtenemos que $\lambda_{12} = -\frac{\langle u_1, e_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}$.

3. Definimos $u_3 = e_3 + \lambda_{13} u_1 + \lambda_{23} u_2$ *e imponemos que* $u_1 \perp u_3$ *y* $u_2 \perp u_3$. *Entonces se tiene que* $\lambda_{13} = -\frac{\langle u_1, e_3 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}$, $\lambda_{23} = -\frac{\langle u_2, e_3 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle}$.

4. Así sucesivamente seguimos hasta obtener $u_1, \ldots, u_{n-1}$ *ortogonales. Entonces definimos* $u_n = e_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{1n} u_i$. *Imponiendo que* $u_1 \perp u_n$ *para* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, *se tiene que* $\lambda_{in} = -\frac{\langle u_i, e_n \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle}$.

Definición 5.16. *Sea U un subconjunto de E. Se llama* **ortogonal** *de U al conjunto*

$$U^{\perp} = \{x \in E : \; x \perp y \quad \forall y \in U\},$$

esto es, al conjunto formado por los vectores ortogonales a todos los vectores de U.

Proposición 5.17. *Sea U un subconjunto de E.*

1. $U^{\perp}$ *es un subespacio vectorial de E.*
2. *Si U es un subespacio vectorial de E y* $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *es una base de U, entonces, dado* $x \in E$, $x \in U^{\perp}$ *si, y sólo si,* $x \perp u_i$, *para todo* $i \in \{1, \ldots m\}$.

Teorema 5.18. *Supongamos que E es de dimensión finita y sea U un subespacio vectorial de E. Entonces*

$$dim(E) = dim(U) + dim(U^{\perp}).$$