



Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Matemáticas (curso 2020-2021)

Responsable de tutorización: **Antonio M. Peralta**

Departamento: **Análisis Matemático**

Área de conocimiento: **Análisis Matemático**

Responsable de cotutorización:

Departamento:

Área de conocimiento:

(Rellenar sólo en caso de que la propuesta esté realizada a través de un estudiante)

Estudiante que propone el trabajo: David Cabezas Berrido

Título del trabajo: Extensión de isometrías entre subconjuntos de dos esferas unidad

Tipología del trabajo (marcar una o varias de las siguientes casillas):

- Complementario de profundización
- Divulgación de las Matemáticas
- Docencia e innovación
- Herramientas informáticas
- Iniciación a la investigación

Materias del grado relacionadas con el trabajo: Cálculo I y II, Análisis Matemático I y II, Topología I, Análisis Funcional.

Descripción y resumen de contenidos:

El Teorema de Mazur-Ulam afirma que toda isometría sobreyectiva entre espacios normados reales es una transformación afín. Este resultado, establecido en 1932, tiene un gran número de aplicaciones en materias ya estudiadas en el grado en Matemáticas. Es probable que los alumnos tengan alguna referencia previa al mismo. En 1972, P. Mankiewicz demostró que toda isometría sobreyectiva entre las bolas unidad cerradas de dos espacios normados reales admite una (única) extensión a una isometría lineal y sobreyectiva entre los mismos. Este resultado afirma que no es necesario tener una isometría sobreyectiva entre la totalidad de los espacios X e Y para poder identificar estos espacios normados, es suficiente con una identificación isométrica de las respectivas bolas unidad cerradas. Una de las variantes más recientes del Teorema de Mazur-Ulam se debe al matemático D. Tingley. Supongamos que $S(X)$ representa la esfera unidad de un espacio normado X . El conocido como Problema de Tingley pregunta cuando una isometría sobreyectiva de $S(X)$ a $S(Y)$ puede ser extendida a una isometría lineal real de X en Y . A pesar de que este problema permanece abierto incluso para espacios 2-dimensionales, en los últimos años se han publicado una gran cantidad de trabajos con respuestas afirmativas al problema de Tingley en espacios pertenecientes a varias clases de espacios de Banach.

Los trabajos más recientes también consideran nuevas variaciones del problema de Tingley al considerar isometrías sobreyectivas entre dos subconjuntos propios de la esfera unidad de dos espacios normados (por ejemplo, los puntos extremos, o los operadores unitarios entre dos C^* -

álgebras, o los subconjuntos de elementos positivos y de norma uno de dos C^* -álgebras o de otros tipos de espacios de operadores).

El objetivo de este TFG es permitir que el alumno se familiarice con algunas de las respuestas positivas que ésta última variante del problema de Tingley admite. Nos centraremos en el caso de las C^* -álgebras de los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert complejo y la subálgebra formada por los operadores compactos. Curiosamente el problema permanece abierto para C^* -álgebras conmutativas y uniales, es decir, para $C(K)$ espacios. Pretendemos avanzar un poco en este último problema.

Actividades a desarrollar:

Reunir referencias bibliográficas y pruebas de los resultados publicadas en libros y artículos de investigación.

Abordar de forma autónoma los resultados y sus demostraciones.

<i>Objetivos matemáticos planteados</i>	
<i>Objetivo</i>	<i>Nivel de dificultad (bajo, medio o alto)</i>
Teoremas de Mazur-Ulam y Mankiewicz. Problema de Tingley.	alto
Problema de Tingley para operadores positivos en dimensión finita.	medio-alto
Problema de Tingley para operadores lineales acotados y positivos en dimensión infinita.	alto
Problema de Tingley para operadores compactos y positivos.	alto, avanzado

Bibliografía para el desarrollo matemático de la propuesta:

- John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, 2nd Edition, Springer-Verlag, 1990.
- G. Nagy, Isometries of spaces of normalized positive operators under the operator norm, *Publ. Math. Debrecen* 92 (2018), no. 1-2, 243-254.
- A.M. Peralta, Characterizing projections among positive operators in the unit sphere, *Adv. Oper. Theory* 3 (2018), no. 3, 731-744.
- A.M. Peralta, A survey on Tingley's problem for operator algebras, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 84 (2018), 81-123.
- A.M. Peralta, On the unit sphere of positive operators, *Banach J. Math. Anal.* 13 (2019), no. 1, 91-112.
- X. Yang, X. Zhao, On the extension problems of isometric and nonexpansive mappings. In: *Mathematics without boundaries*. Edited by Themistocles M. Rassias and Panos M. Pardalos. 725-748, Springer, New York, 2014.

--

Firma del estudiante
(solo para trabajos propuestos por alumnos)

Firma del responsable de tutorización
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

Firma del responsable de cotutorización
(solo para trabajos propuestos por estudiantes)

En, Granada, a 01 de Junio de 2020